

Matrice

1. Matricea A cu $m \in \mathbb{N}$ linii si $n \in \mathbb{N}$ coloane si elementele $a_{ij} \in \mathbb{C}$ o vom nota prescurtat cu $A = (a_{ij})_{m,n}$ si vom face observatia ca A (sau A_{mn}) are mn elemente.

Daca $n=1$ avem o matrice coloana (are o singura coloana), iar daca $m=1$ avem o matrice linie (are o singura linie). O matrice in care $m=n$ (notam A_n) este o matrice patratica de ordinul n ; diagonala principala este formata din elementele din coltul din stanga sus in coltul din dreapta jos ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots, a_{nn}$), iar diagonala secundara este formata din elementele din coltul din dreapta sus in coltul din stanga jos ($a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, a_{4n-3}, \dots, a_{n1}$).

Vom folosi si o notatie de forma : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 7 \end{vmatrix}$ pentru o matrice tip (3;4)

adica o matrice care are 3 linii si 4 coloane.

Vom folosi si o notatie de forma : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 7 \end{vmatrix}$ pentru determinantul asociat

matricei de mai sus, care este un numar ce poate fi calculat cu mai multe reguli (dezvoltarea dupa o linie/coloana, Sarrus, etc...); am folosit doua bare pentru matrice si o bara pentru determinant.

Fie $A = (a_{ij})_{m,n}$ si $B = (b_{ij})_{m,n}$ si $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$ suma celor doua matrice.

Avem: $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$,

$A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$, unde $O_{m,n}$, are toate elementele 0. Produsul matricelor $A_{m,n} B_{n,p} = (c_{ij})_{m,p}$, unde elementele produsului sunt calculate cu relatia $c_{ij} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$, unde $i=1;2;3; \dots; m$ si $k=1;2;3; \dots; p$ deci, precum, se inmultesc liniile cu coloanele. Avem urmatoarele proprietati : $(AB)C = A(BC)$, $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$, $AI_n = I_n A = A$, unde I_n este matricea unitate pentru inmultire, are toate elementele egale cu 0, cu exceptia celor de pe diagonala principala care sunt egale cu 1.

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m,n}$ unde λA este inmultirea cu scalari, $\lambda \in \mathbb{C}$. Daca schimbam liniile si coloanele intre ele in matricea A , obtinem o matrice notata ${}^t A$ si pe care o numim matricea transpusa a matricei A .

Spunem ca matricea A are rangul r daca A are un minor nenul de ordinul r , (un determinant cu r linii si r coloane extrase din liniile si coloanele lui A) iar toti minorii lui A de ordin mai mare decit r , daca exista, sunt nuli.

Matricea A_n este inversabila daca exista matricea A_n^{-1} astfel incit

$A_n A_n^{-1} = A_n^{-1} A_n = I_n$ si vom nota matricea A^{-1} .

2. Sisteme de ecuatii liniare

Un sistem are forma $AX = B$ si solutia este $X = A^{-1}B$.

Ex.1 Fie $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, calculati determinantul si rangul matricei.

$\det(A) = (1)(-1) - (1)(1) = -2$, deci $\text{rang}(A) = 2$.

Ex.2 Fie $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, calculati A^2 , determinantul si rangul matricei.

$\det(A) = (1)(0) - (1)(1) = -1$, deci $\text{rang}(A) = 2$. $A^2 = AA = \begin{vmatrix} (1)(1)+(1)(1) & (1)(1)+(1)(0) \\ (1)(1)+(0)(1) & (1)(1)+(0)(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Ex.3 Fie $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$, calculati A^2 , determinantul si rangul matricei si inversa .

$\det(A) = (1)(5) - (2)(-3) = 11$, $\text{rang}(A) = 2$. $A^2 = AA = \begin{vmatrix} (1)(1)+(2)(-3) & (1)(2)+(2)(5) \\ (-3)(1)+(5)(-3) & (-3)(2)+(5)(5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 12 \\ -18 & 19 \end{vmatrix}$

Calculam inversa astfel:

a) calculam $\det(A) = (1)(5) - (2)(-3) = 11$

b) transpusa (schimbam liniile cu coloanele) ${}^tA = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

c) adjuncta (inlocuim fiecare element a_{ij} al transpusei cu $(-1)^{i+j}D_{ij}$, unde D_{ij} este complementul algebric al lui a_{ij} , adica taiem linia si coloana lui a_{ij} si calculam determinantul D_{ij} al matricei ramasa) ${}^*A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) inversa $A^{-1} = (1/11) {}^*A = \begin{vmatrix} 5/11 & -2/11 \\ 3/11 & 1/11 \end{vmatrix}$

Se verifica relatia $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Ex.3 Fie $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, calculati rangul matricei si inversa .

a) calculam $\det(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2((1)(1) - (0)(-1)) = 2$$

b) transpusa $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) adjuncta (inlocuim fiecare element a_{ij} al transpusei cu $(-1)^{i+j}D_{ij}$, unde D_{ij} este complementul algebraic al lui a_{ij} , adica taiem linia si coloana lui a_{ij} si calculam determinantul D_{ij} al matricei ramasa) ${}^*A = ?$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Deci } \text{adjuncta } {}^*A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) inversa } A^{-1} = (1/2) {}^*A = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Se verifica relatia } A A^{-1} = A^{-1} A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$