Matrice

1.Matricea A cu $m \in N$ linii si $n \in N$ coloane si elementele $a_{ij} \in C$ o vom nota prescurtat cu $A=(a_{ij})_{m,n}$ si vom face observatia ca A(sau A_{mn}) are mn elemente.
Daca n=1 avem o matrice coloana(are o singura coloana), iar daca m=1 avem o matrice linie(are o singura linie). O matrice in care m=n(notam A_n) este o matrice patratica de ordinul n; diagonala principala este formata din elementele din coltul din stinga sus in coltul din dreapta jos(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ..., a_{nn}), iar diagonala secundara este formata din elementele din coltul din dreapta sus in coltul din stinga jos(a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, a_{4n-3}, ..., a_{n1}).
Vom folosi si o notatie de forma : $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 7 \end{Vmatrix}$ pentru o matrice tip (3;4)

adica o matrice care are 3 linii si 4 coloane.
Vom folosi si o notatie de forma : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 7 \end{vmatrix}$ pentru determinantul asociat

matricei de mai sus, care este un numar ce poate fi calculat cu mai multe reguli(dezvoltarea dupa o linie/coloana, Sarrus, etc...); am folosit doua bare pentru matrice si o bara pentru determinant.
Fie $A=(a_{ij})_{m,n}$ si $B=(b_{ij})_{m,n}$ si $C= A=(a_{ij}+ b_{ij})_{m,n}$ suma celor doua matrice.
Avem: A+B=B+A, (A+B)+C=A+(B+C), $A+O_{m,n} =O_{m,n} +A=A$,
$A+(-A)=(-A)+A= O_{m,n}$, unde $O_{m,n}$, are toate elementele 0. Produsul matricelor $A_{m,n} B_{n,p} =(c_{ij})_{m,p}$, unde elementele produsului sunt calculate cu relatia $c_{ij} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+ ...+a_{in}b_{nk}$, unde i=1;2;3; ... ;m si k=1;2;3; ... ;p deci , precurtat, se inmultesc liniile cu coloanele. Avem urmatoarele proprietati : (AB)C=A(BC), A(B+C)=AB+AC, (A+B)C=AC+BC, $AI_n =I_nA=A$, unde I_n este matricea unitate pentru inmultire, are toate elementele egale cu 0, cu exceptia celor de pe diagonala principala care sunt egale cu 1.
$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m,n}$ unde λA= este inmultirea cu scalari, $\lambda \in$ C. Daca schimbam liniile si coloanele intre ele in matricea A, obtinem o matrice notata ${}^tA$ si pe care o numim matricea transpusa a matricei A.
Spunem ca matricea A are rangul r daca A are un minor nenul de ordinul r, (un determinant cu r linii si r coloane extrase din liniile si coloanele lui A)iar toti minorii lui A de ordin mai mare decit r, daca exista, sunt nuli.
Matricea A_n este inversabila daca exista matricea A_n' astfel incit $A_nA'_n=A'_nA_n=I_n$ si vom nota matricea $A'=A^{-1}$.

2.Sisteme de ecuatii liniare
Un sistem are forma AX=B si solutia este $X= A^{-1}B$.

Ex.1 Fie $A=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{Vmatrix}$ **, calculati determinantul si rangul matricei.**

det(A)=(1)(-1)-(1)(1)=-2, deci rang(A)=2.

Ex.2 Fie $A=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$**, calculati** A^2**, determinantul si rangul matricei.**

det(A)=(1)(0)-(1)(1)=-1, deci rang(A)=2. $A^2=AA=\begin{Vmatrix}(1)(1)+(1)(1) & (1)(1)+(1)(0)\\ (1)(1)+(0)(1) & (1)(1)+(0)(0)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{Vmatrix}$

Ex.3 Fie $A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{Vmatrix}$ **, calculati** A^2**, determinantul si rangul matricei si inversa .**

det(A)=(1)(5)-(2)(-3)=11, rang(A)=2. $A^2=AA=\begin{Vmatrix}(1)(1)+(2)(-3) & (1)(2)+(2)(5)\\ (-3)(1)+(5)(-3) & (-3)(2)+(5)(5)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-5 & 12\\ -18 & 19\end{Vmatrix}$

Calculam inversa astfel:

a) **calculam det(A)=(1)(5)-(2)(-3)=11**

b) **transpusa(schimbam liniile cu coloanele)** ${}^tA=\begin{Vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{Vmatrix}$

c) **adjuncta(inlocuim fiecare element** a_{ij} **al transpusei cu** $(-1)^{i+j}D_{ij}$ **, unde** D_{ij} **este complementul algebric al lui** a_{ij}**, adica taiem linia si coloana lui** a_{ij} **si calculam determinantul** D_{ij} **al matricei ramasa)** ${}^*A=\begin{Vmatrix}5 & -2\\ 3 & 1\end{Vmatrix}$

d) **inversa** $A^{-1}=(1/11)\,{}^*A=\begin{Vmatrix}5/11 & -2/11\\ 3/11 & 1/11\end{Vmatrix}$

Se verifica relatia $A\,A^{-1}=A^{-1}A=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$

Ex.3 Fie $A=\begin{Vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}$ **, calculati rangul matricei si inversa .**

a) calculam det(A)= 2

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2((1)(1)-(0)(-1))=2$$

b) transpusa $\begin{Vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{Vmatrix}$

c) adjuncta(inlocuim fiecare element a_{ij} al transpusei cu $(-1)^{i+j}D_{ij}$, unde D_{ij} este complementul algebric al lui a_{ij}, adica taiem linia si coloana lui a_{ij} si calculam determinantul D_{ij} al matricei ramasa) $^{*}A=$?

$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ **Deci adjuncta** $^{*}A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$

d) inversa $A^{-1}=(1/2)\,{}^{*}A = \begin{Vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{Vmatrix}$

Se verifica relatia $A\,A^{-1}= A^{-1}\,A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$