Numere reale

1.Multimea numerelor reale R, impreuna cu doua operatii notate "+" si "·" precum si cu o relatie notata "≤" are urmatoarele proprietati , oricare ar fi x,y,z din R:

1) R este corp comutativ :

a) $(x+y)+z=x+(y+z)$ b) $x+y=y+x$
c) exista 0 a.i. $x+0=x$ d) exista $-x$ a.i. $x+(-x)=0$
e) $(xy)z=x(yz)$ f) $xy=yx$
g) exista 1 a.i. $x\cdot 1=x$ h) $x(y+z)=xy+xz$
i) exista x' a.i. $xx'=1$, daca $x\neq 0$, $x'=1/x$

2) R este corp ordonat :

a) $x\leq x$
b) $x\leq y$ si $y\leq x$ rezulta $x=y$
c) $x\leq y$ si $y\leq z$ rezulta $x\leq z$
d) $x\leq y$ sau $y\leq x$
e) $x\leq y$ rezulta $x+z\leq y+z$
f) $x\leq y$ si $0\leq z$ rezulta $xz\leq yz$

3) R este corp complet ordonat(axioma Cantor-Dedekind) :

Orice submultime A, nevida de numere reale, marginita superior, (contine un element M, la dreapta caruia nu se afla elemente din A) are margine superioara in R. M=supA.
Orice submultime A, nevida de numere reale, marginita inferior, (contine un element m, la stinga caruia nu se afla elemente din A) are margine inferioara in R. m=infA.
O submultime A, nevida de numere reale, este marginita daca exista un numar real m, astfel incit $|x|<m$, oricare ar fi x din A.

Dreapta incheiata: $\overline{R}=R\cup\{-\infty ; +\infty\}$

$V\subseteq\overline{R}$, se numeste vecinatate a lui x_0 din $\overline{R}$ daca exista $\varepsilon>0$ a.i.
$V\supseteq(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ sau $V\supseteq(\varepsilon; +\infty)$ daca $x_0=+\infty$ sau $V\supseteq(-\infty ; -\varepsilon)$ daca $x_0=-\infty$

<u>P1</u> Intre doua numere x si y diferite($x<y$) din R, exista cel putin un numar rational r si cel putin un numar irational α :
$x<r<y$, $x<\alpha<y$
Rezulta ca intre doua numere x si y diferite($x<y$) din R, exista o infinitate de numere rationale r si o infinitate de numere irationale α.

<u>P2</u> Oricare ar fi numerele reale $x>0$ si y exista un numar natural n astfel incit $nx>y$.(Axioma lui Arhimede)
Rezulta ca oricare ar fi y din R, exista un numar natural n astfel incit $n>y$.
Daca $n\leq y<n+1$ si n din Z, $n=[y]$=partea intreaga a lui y.

<u>Inegalitatea lui Bernolli</u>
Oricare ar fi numarul real $a\geq -1$ si n numar natural avem inegalitatea $(1+a)^n\geq 1+na$.

Limite de siruri

1. Orice functie $f:N^* \longrightarrow R$ se numeste sir. Notam $f(n)=x_n$.

Ex. 1. $x_n = n$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, ...

2. $x_n = n-1$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ...

3. $x_n = 1/n$, $x_1=1$, $x_2=1/2$, $x_3=1/3$ ...

4. $x_n = \sqrt{n^2+1}$, $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{5}$, $x_3=\sqrt{10}$ ...

5. $x_n = n^2 - 1$, $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=8$ ...

6. $x_0=x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$, $n>0$

2. Un sir (x_n) este marginit, daca si numai daca, $(\exists)$ (exista) $M>0$, astfel incit $|x_n| \le M$, $(\forall)$ (oricare ar fi) $n \in N$.

Ex. 1. $x_n = n$, este nemarginit, pt.ca $(\forall)$ $M>0$, $(\exists) n \in N$ a.i. $n>M$ (axioma Arhimede)

2. $x_n = 1/3^n$, marginit($0< x_n <1$)

3. $x_n = 1/n$, marginit, pt.ca $0< x_n \le 1$

4. $x_n = \sqrt{n^2+1}$, nemarginit($M<n<\sqrt{n^2+1}$, etc...)

5. $x_n = n^2 - 1$, nemarginit($M<n<n^2-1$, etc...)

6. $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, marginit($0<x_n=1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})<1/2$)

7. $x_n=(2n+1)/(2n-1)$ 8. $x_n = 3^n/n$, 9. $x_n = (-1)^n 2^n/(2^n+1)$

10. $x_n=n\sin(n\pi/3)$, 11. $x_n = 3^n/(n!)$, 12. $x_n = (1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1))/(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n))$,

13. $x_n=2\cos(\pi/2^{n+2})$, 14. $x_0 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, 15. $x_n = (n!)/5^n$

3. Un sir (x_n) este strict crescator daca $x_n<x_{n+1}$ oricare ar fi $n \in N$; $x_{n+1} - x_n>0$ sau $x_{n+1}/x_n>1$ si crescator daca $x_n \le x_{n+1}$.

4. Un sir (x_n) este strict descrescator daca $x_n>x_{n+1}$ oricare ar fi $n \in N$; $x_{n+1} - x_n<0$ sau $x_{n+1}/x_n<1$; este descrescator daca $x_n \ge x_{n+1}$.

Ex. 1. $x_n = n$, strict crescator, $n<n+1$

2. $x_n = n-1$, strict crescator, $n-1<n$

3. $x_n = 1/n$, strict descrescator, $1/n>1/(n+1)$

4. $x_n = \sqrt{n^2+1}$, strict crescator, $n<n+1$, $n^2 <(n+1)^2$, $n^2+1<(n+1)^2+1$, $\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$

5. $x_n = n^2 - 1$, strict crescator, $n^2-1< (n+1)^2-1= n^2+2n+1-1= n^2+2n$

6. $x_n = n/(n+1)$, $x_{n+1}/x_n= (n+1)(n+1)/(n(n+2))= (n^2+2n+1)/(n^2+2n)=1+1/(n^2+2n)>1$, strict crescator

7. $x_n = (n+2)/(n+1)$, $x_{n+1}/x_n= (n+3)(n+1)/(n+2)^2= (n^2+4n+3)/(n^2+4n+4)<1$, strict descrescator

8. $x_n = 1/2^n$, $x_{n+1}/x_n=2^n/2^{n+1}=1/2<1$, strict descrescator

9. $x_n = \sqrt{n+1}- \sqrt{n}$, strict crescator, $n+1>n$, $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$

10. $x_n=2^n/n!$ $x_{n+1}/x_n=(2^{n+1}/(n!(n+1)))(n!/ 2^n)=2/(n+1)\le 1$, descrescator(ne-strict)

11. $x_n = 1+(-1)^n$, $x_{n+1}-x_n=2(-1)^n$, nu este monoton(este >0 daca n=par si <0 daca n=impar)

12. $x_n=(n!)/(n+1)$, **13.** $x_n=2^n/n$, **14.** $x_n=3^{\sqrt{n}}$, **15.** $\sin(n\pi/3)$

5.Spunem ca x este limita sirului x_n , $n\in N$ daca orice vecinatate a lui x contine toti termenii sirului, cu exceptia(eventual) a unui numar finit dintre termenii sirului;$x_n \longrightarrow x$, x_n este convergent catre x, sau x_n tinde catre x.
6. Spunem ca x este limita sirului x_n , $n\in N$ daca si numai daca, pentru orice numar real $\varepsilon>0$, exista un rang n_ε (care depinde de ε) , astfel incit, pentru orice $n\geq n_\varepsilon$ sa avem $|x_n - x|<\varepsilon$.

Ex.1: $x_n=n/(3n+1)$, are limita 1/3($\lim_{n\to\infty} x_n =1/3$)

Sa aratam ca pentru orice $\varepsilon>0$, exista un rang n_ε astfel incit $|x_n-1/3|<\varepsilon$.
$|x_n-1/3|= | n/(3n+1)-1/3|=1/(3n+1)< \varepsilon$, pt. $n>(1-\varepsilon)/(3\varepsilon)$, luam $n_\varepsilon=[(1-\varepsilon)/(3\varepsilon)]+1$, daca $0<\varepsilon\leq 1$ si $n_\varepsilon=1$ daca $\varepsilon>1$
2. $x_n =1+(-1)^n$, nu este convergent ($x_{2n} =2$, $x_{2n+1} =0$); exista o vecinatate a lui 2 in care sunt o infinitate de termeni, $x_{2n} =2\in V_2=(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$, $0<\varepsilon<1$, dar o infinitate de termeni $x_{2n+1} =0$ nu apartin lui V_2

7. Daca sirul x_n , $n\in N$, $x_n>0$ este strict crescator si nemarginit, atunci sirul $y_n=1/x_n$, $n\in N$, are limita 0.
($\lim_{n\to\infty} 1/x_n =0$)

Ex.1: Sirurile $x_n=1/n$, $y_n=1/(3n+1)$, $z_n=1/2^n$, $a_n=1/\sqrt{n}$, $b_n=1/n^2$, $c_n=(0,2)^n$, $d_n=1/n^x$ ($x>0$), etc ... au limita 0.

8. Daca $| x_n - x|\leq a_n$,oricare ar fi $n\in N$ si $a_n \to 0$, atunci $x_n \to x$.

Ex.1: $x_n=n/(5n+3)$, $|x_n -1/5|=|-5/(5n+3)|=5/(5n+3)$, dar $a_n=5/(5n+3)$ are limita 0, pentru ca $5n+3$ este strict crescator si nemarginit, rezulta $x_n \longrightarrow 1/5$
2. $x_n=(\sin(n\pi/3)/(n^2)$, $\sin(n\pi/3)/(n^2)\leq (n\pi/3)/(n^2) \leq (\pi/(3n) \longrightarrow 0$
3. $x_n=(n!)/(n^n)$, $x_n=(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)/(n\cdot n\cdot\ldots\cdot n)< (1\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n)/((n\cdot n\cdot\ldots\cdot n)(n))=1/n \longrightarrow 0$

9. Daca a_n , b_n si c_n sunt trei siruri care satisfac conditiile:
1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ oricare ar fi $n\in N$ si $n \geq n_0\in N$, n_0 dat
2) $\lim a_n =\lim c_n =a$,
atunci sirul b_n este convergent si are aceeasi limita, adica $\lim b_n =a$.

Ex.1: $x_n=1/(3n+2)$, $0<x_n <1/n$, dar $a_n=1/n$ are limita 0, pentru ca n este strict crescator si nemarginit, rezulta $x_n \longrightarrow 0$
Ex.2: $x_n=2/n+1/n^2$, $1/n<2/n<x_n<2/n+1/n=3/n$, dar $1/n$ si $1/n^2$ au limita 0, rezulta ca $x_n \longrightarrow 0$
Ex.3: $x_n=n/\sqrt{n^2 +1}$, $n/(n+1)=n/\sqrt{(n+1)^2}< x_n =n/\sqrt{n^2+1}=\sqrt{n^2/(n^2+1)}< \sqrt{(n^2+1)/(n^2+1)}=1$, dar $n/(n+1)$ are limita 1, rezulta ca $x_n \to 1$

10.Siruri fundamentale :

1) $a_n = 1/n \longrightarrow 0$ (sirul $x_n = n$, este crescator nemarginit)

2) $a_n = 1/\sqrt{n} \longrightarrow 0$ ($n>M$, oricare ar fi $M>0$(ax.Arhimede))

3) $a_n = n^{\alpha} \longrightarrow 0$, daca $\alpha<0$

4) $a_n = a^n \longrightarrow \infty$, daca $a>1$

5) $a_n = a^n \longrightarrow 0$, daca $-1<a<1$

6) $a_n = (1+1/n)^n \longrightarrow e$, unde $2<e>3$, $e=2,718...$

7) $a_n = (1+1/x_n)^{x_n} \longrightarrow e$, daca sirul $x_n \longrightarrow 0$

8) $a_n = (\ln(1+x_n))/(x_n) \longrightarrow 1$, daca sirul $x_n \longrightarrow 0$

$a_n = (\sqrt[5]{n})\ln(1/\sqrt[3]{n+1}) = (\sqrt[5]{n})(1/\sqrt[3]{n})((\ln(1/\sqrt[3]{n+1}))/(1/\sqrt[3]{n})) =$

$(n^{-2/15})((\ln(1/\sqrt[3]{n+1}))/(1/\sqrt[3]{n})) \longrightarrow 1\cdot 0 = 0$

9) $a_n = (a^{x_n} - 1)/(x_n) \longrightarrow \ln a$, daca sirul $x_n \longrightarrow 0$

$a_n = n(\sqrt[n]{e}-1) = (e^{1/n}-1)/(1/n) \longrightarrow \ln e = 1$

$b_n = n(\sqrt[n]{2}-1) = (2^{1/n}-1)/(1/n) \longrightarrow \ln 2$

10) $a_n = ((1+x_n)^{\alpha} - 1)/(x_n) \longrightarrow \alpha$, daca sirul $x_n \longrightarrow 0$, $\alpha \in R$

$a_n = (\sqrt{n})((1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5 - 1) = (\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})((1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5 - 1)/$

$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})) = ((\sqrt{n})/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}))((1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5 - 1)/(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}))$

Rezulta, $\lim a_n = 5\cdot 1/2$

11) $(\sin x_n)/(x_n) \longrightarrow 1$, daca $x_n \longrightarrow 0$

$a_n = n\sin(1/n) = (\sin(1/n))/(1/n) \longrightarrow 1$

12) $a_n = a^n/n \longrightarrow \infty$, daca $a>1$ ($a=1+b$, $b>0$, $a^n = (1+b)^n =$

$1+C_n^1 b + C_n^2 b^2 + ... + b^n) > C_n^2 b^2 = b^2(n(n-1))/2$

Rezulta $a_n = a^n/n > b^2(n-1)/2 = n(b^2(1-1/n)/2) > M$, oricare ar fi $M>0$ (ax.Arhimede)

13) $a_n = a^n/n^k \longrightarrow \infty$, daca $a>1$, $k>1$

$a_n = a^n/n^k = (a^{n/k}/n)^k = b^n/n$, unde $b = a^{1/k} > 1$, deci sirul 12

14) $a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, $n \geq 2$

$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} < \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}} \Leftrightarrow$

$(n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow ((n+1)/n)^n < n \Leftrightarrow (1+1/n)^n < n$(dem. prin inductie)

Dar, $1 < a_n$ si descrescator, rezulta $a_n \longrightarrow 1$

15) $a_n = \sqrt[n]{1^p+2^p+3^p+...+n^p} \longrightarrow 1$, $n \geq 2$, $p \geq 1$

$0 < |a_n - 1| < ((\sqrt[n]{n})^{p+1} - 1) \longrightarrow 0$

16) $a_n = \ln(n)/n \longrightarrow 0$

17) $a_n = \log_a(n)/n \longrightarrow 0$, $a>0$, $a \neq 1$

11.Nedeterminari; operatii fara sens

$\infty - \infty$; 0∞ ; ∞/∞ ; $0/0$; 1^{∞} ; ∞^{0} ; 0^{0} ;

1. Nedeterminare de tipul : $\infty - \infty$

   a) **$a_n = n$, $b_n = -n+1$, $\lim(a_n + b_n) = 1$**
   b) **$a_n = n$, $b_n = -n+2$, $\lim(a_n + b_n) = 2$**
   c) **$a_n = n+(-1)^n$, $b_n = -n$, $\lim(a_n + b_n) = (-1)^n$, dar $(-1)^n$ nu este convergent.**

Deci, operatia $\infty - \infty$ nu are sens.

Cum se ridica o nedeterminare de tipul : $\infty - \infty$:

1) **$a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n+2} = (\infty - \infty) = n(\sqrt{1+2/n^2} - \sqrt{1/n+2/n^2} = \infty(1-0 = \infty$**

2) **$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = n(\sqrt{1+1/n+1/n^2} - \sqrt{1-1/n+1/n^2}) = \infty(0) =$**
$n(\sqrt{1+1/n+1/n^2} + \sqrt{1-1/n+1/n^2})(\sqrt{1+1/n+1/n^2} - \sqrt{1-1/n+1/n^2})/$
$(\sqrt{1+1/n+1/n^2} + \sqrt{1-1/n+1/n^2}) = (2n)/(\sqrt{1+1/n+1/n^2} + \sqrt{1-1/n+1/n^2}) \to 1$

2. Nedeterminare de tipul : 0∞

   a) **$a_n = n^2$, $b_n = 1/n$, $\lim(a_n b_n) = \infty$**
   b) **$a_n = n$, $b_n = 1/n^2$, $\lim(a_n b_n) = 0$**
   c) **$a_n = n$, $b_n = (-1)^n/n$, $\lim(a_n b_n) = (-1)^n$, dar $(-1)^n$ nu este convergent.**

Deci, operatia 0∞ nu are sens.

Cum se ridica o nedeterminare de tipul : $\infty 0$:

1) **$a_n = n(\sqrt{(n+3)/(n+2)} - 1) = 0(\infty) = n(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})/(\sqrt{n+2})) =$**
$n/((\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+2})) = n/(\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+4n+4}) =$
$n/(n(\sqrt{1+5/n+6/n^2} + \sqrt{1+4/n+4/n^2})) = 1/(\sqrt{1+5/n+6/n^2} + \sqrt{1+4/n+4/n^2})$
rezulta $\lim a_n = 1/2$

2) **$a_n = (n^2/(n+1))\sin(1/n) = (n/(n+1))(\sin(1/n))/(1/n)) \longrightarrow 1$**

3. Nedeterminare de tipul : ∞/∞

   a) **$a_n = n$, $b_n = -n+1$, $\lim(a_n/b_n) = -1$**
   b) **$a_n = n$, $b_n = 2n+1$, $\lim(a_n/b_n) = 1/2$**
   c) **$a_n = n(-1)^n$, $b_n = n$, $\lim(a_n/b_n) = (-1)^n$, dar $(-1)^n$ nu este convergent.**

Deci, operatia ∞/∞ nu are sens.

Cum se ridica o nedeterminare de tipul : ∞/∞ :

1) **$a_n = n/(n+1) = n/(n(1+1/n)) = 1/(1+1/n) \longrightarrow 1$**

2) $a_n = 2n/(n+1) = 2n/(n(1+1/n)) = 2/(1+1/n) \longrightarrow 2$

3) **$a_n = (2n^2+7)/(5n^2+3n+1) = n^2(2+7/n^2)/(n^2(5+3/n+1/n^2)) =$**
$(2+7/n^2)/(5+3/n+1/n^2) \longrightarrow 1$

4) $a_n=n/(\sqrt{(n+3)/(n+2)}-1) = n/(n(\sqrt{1+5/n+6/n^2}-1/n)) =$
$1/(\sqrt{1+5/n+6/n^2}-1/n) \longrightarrow 1$

5) $a_n=n/(\sqrt{n^2+3}) = n/(n(\sqrt{1+3/n^2})) = 1/(\sqrt{1+3/n^2}) \longrightarrow 1$

6) $a_n= n/(\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+4n+4})=$
$n/(n(\sqrt{1+5/n+6/n^2} + \sqrt{1+4/n+4/n^2}))= 1/(\sqrt{1+5/n+6/n^2}+\sqrt{1+4/n+4/n^2})$
rezulta lim $a_n = 1/2$
7) $a_n =(n^2/(n+1))\sin(1/n) =(n/(n+1))(\sin(1/n))/(1/n)) \longrightarrow 1$
8) $a_n =(25+2n^3)/(3n^3+1) =(n^3(2+25/n^3))/(n^3(3+1/n^3)) \longrightarrow 2/3$
9) $a_n=((1+n)^4-(n-1)^4)/(n^3)=(8(1+n^2))/n^2$, $8<a_n<8(1+n)^2/n^2=8(1+1/n) \longrightarrow 8$
4. Nedeterminare de tipul : 0/0
a) $a_n =1/n$, $b_n =2/n$, $\lim(a_n /b_n)=1/2$
b) $a_n =1/n$, $b_n =1/n^2$, $\lim(a_n /b_n)= +\infty$
c) $a_n =(-1)^n/n$ $b_n =1/n$, $\lim(a_n /b_n)= (-1)^n$, **dar** $(-1)^n$ **nu este convergent.**

Deci, operatia 0/0 nu are sens.
Cum se ridica o nedeterminare de tipul : 0/0 :
1. $a_n =\sqrt{n}(\sqrt[n]{e} - 1)=(\sqrt{n}/n)(e^{1/n}-1)/(1/n) \longrightarrow 0\cdot 1=0$
2. $a_n =\sqrt{n+1}(\ln(1+1/(n+1))=(\sqrt{n+1}/(n+1))(\ln(1+1/(n+1))/(1/(n+1))$
$\longrightarrow =0\cdot 1=0$

5. Nedeterminare de tipul : 1^∞
a) $a_n =e^{1/n}$, $b_n =n$, $\lim(a_n^{b_n})=e$
b) $a_n =e^{1/n}$, $b_n =n^2$, $\lim(a_n^{b_n})= \infty$
c) $a_n : e^{-1}, e^{1/2}, e^{-1/3}, e^{1/4},\ldots$ $b_n =n$, $\lim(a_n^{b_n})=$ **nu este convergent.**

Deci, operatia 1^∞ nu are sens.
Cum se ridica o nedeterminare de tipul 1^∞ :

Folosim limita : $\lim(1+ x_n)^{x_n} =e$, si egalitatea $x=e^{\ln x}$
1) $a_n =((n+1)/(n+2))^n=$
Sirul $x_n=((n+1)/(n+2))^n =(1+((n+1)/(n+2)-1))^n =(1+(-1/(n+2)))^n$
$=((1+(-1/(n+2)))^{(-(n+2))})^{(-n/(n+2))}$
Sirul $y_n =-n/(n+2)$ **=are limita -1, iar sirul**
$z_n=(1+(-1/(n+2)))^{(-(n+2))}$ **are limita e, deci limita cautata este** e^{-1}

2) $a_n = ((n^2+3)/(n^2+2))^n$

Sirul $x_n = (1+(n^2+3)/(n^2+2)-1)^n = (1+(1/(n^2+2)))^n =$
$((1+(1/(n^2+2)))^{n^2+2})^{n/(n^2+2)}$

Sirul $y_n = ((1+(1/(n^2+2)))^{n^2+2})$ tinde catre e, iar sirul $z_n = n/(n^2+1)$ tinde catre 0, deci lim $a_n = e^0 = 1$

3) $a_n = (1+(n+3)/(n^2+2))^n$

Sirul $x_n = (1+(n+3)/(n^2+2))^n =$
$(((1+((n+3)/(n^2+2)))^{(n^2+2)/(n+3)})^{(n+3)/(n^2+2)})^n \longrightarrow e$

Sirul $y_n = ((1+((n+3)/(n^2+2)))^{(n^2+2)/(n+3)})$ tinde catre e, iar sirul $z_n = n(n+3)/(n^2+2)$ tinde catre 1, deci lim $a_n = e^1 = e$

6. Nedeterminare de tipul : ∞^0

a) $a_n = e^{n^2}$, $b_n = 1/n$, $\lim(a_n^{b_n}) = +\infty$
b) $a_n = e^{n^2}$, $b_n = -1/n$, $\lim(a_n^{b_n}) = 0$
c) $a_n = e^n$, $b_n = (-1)^n/n$, $\lim(a_n^{b_n}) =$ **nu este convergent.**

Deci, operatia ∞^0 nu are sens.

1) $a_n = (3^n+1)^{1/n} = (3^n)^{1/n}(1+1/3^n))^{1/n} = (3)(1+1/3^n))^{1/n} \longrightarrow 0$

7. Nedeterminare de tipul : 0^0

a) $a_n = 1/n$, $b_n = -1/(n+1)$, $\lim(a_n^{b_n}) = +\infty$
b) $a_n = 1/n$, $b_n = 1/(n+1)$, $\lim(a_n^{b_n}) = 0$
c) $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = 1/n$, $\lim(a_n^{b_n}) = 0 = (-1)^n$, **dar $(-1)^n$ nu este convergent.**

Deci, operatia $\infty - \infty$ nu are sens.

1) $a_n = 1/(3^n+1)^{1/n} = 1/((3^n)^{1/n}(1+1/3^n))^{1/n}) = 1/((3)(1+1/3^n))^{1/n}) \longrightarrow 1/3$

Exercitii suplimentare:

1. $a_n = n/(n+1)$
2. $a_n = \sqrt[3]{n+1}$
3. $a_n = 3n/(2n+1)$
4. $a_n = 1/(\sqrt[3]{n+1})$
5. $a_n = (4n+5)/(3n+2)$
6. $a_n = (1+\sqrt{n})/(2\sqrt{n+1})$
7. $a_n = (2\ln n+5)/(3\ln n-2)$
8. $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Limite de functii

1. Fie A o submultime nevida a lui R. Un punct x_0 apartinind lui $x_0 \in R \cup \{+\infty; -\infty\}$, se numeste punct de acumulare al multimii A, daca in orice vecinatate V, a lui x_0 exista puncte din A; $(V-\{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.

Daca notam cu A' multimea punctelor de acumulare ale multimii A, atunci daca $x_0 \in A'$ nu inseamna ca $x_0 \in A$.
De exemplu :

- **a) $3 \notin A=(3;12]$, dar $3 \in A'=[3;12]$.**
- **b) $A=\{1;2;3\}$, $A'=\emptyset$**
- **c) $A=N$, $A'=\{+\infty\}$**
- **d) $A=\{1/n \ / \ n \in N, n>0\}$, $A'=\{0\}$**
- **e) $A=Z$, $A'=\{+\infty ; -\infty\}$**
- **f) $A=R$, $A'=R \cup \{+\infty ; -\infty\}=\overline{R}$**

2. Fie A o submultime nevida a lui R. Un punct x_0 apartinind lui $x_0 \in A$, se numeste punct izolat al multimii A, daca exista cel putin o vecinatate V, a lui x_0 in care nu exista puncte din A diferite de x_0; $(V-\{x_0\}) \cap A=\emptyset$.

3. Fie A o submultime nevida a lui R. Un punct x_0 apartinind lui $x_0 \in R \cup \{+\infty; -\infty\}$, este un punct de acumulare al submultimii A, daca si numai daca exista un sir x_n, $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, oricare ar fi $n \in N$, sir cu proprietatea ca $\lim (x_n)= x_0$.

4. Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct de acumulare al multimii A, iar $f:A \rightarrow R$ si $l \in \overline{R}$. Spunem ca l este limita functiei f in x_0 daca pentru orice sir $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in A-\{x_0\}$, sirul $f(x_n) \rightarrow l$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)= l$.

Ex.1: $f(x)=1/(3x+2)$ Sa calculam $\lim f(x)$ cind $x \longrightarrow \infty$. Pentru sirul $n \longrightarrow \infty$
$x_n=1/(3n+2)$, $0<x_n<1/n$, dar $a_n=1/n$ are limita 0, pentru ca n este strict crescator si nemarginit, rezulta $x_n \longrightarrow 0$. Dar trebuie sa aratam ca pentru orice sir $a_n \longrightarrow \infty$, sirul $y_n=f(a_n) \rightarrow 0$
$y_n=1/(3a_n+2)$, $0<y_n<1/a_n$, dar $1/a_n$ are limita 0 pentru ca a_n este strict crescator si nemarginit, rezulta $y_n \longrightarrow 0$.

Ex.2: $\lim\limits_{x \to 0}((x+1)/(3x+2)) = (0+1)/(3\cdot 0+2) = 1/2$

Ex.3: $\lim\limits_{x \to 1}((x^2+1)/(3x+2)) = (1^2+1)/(3\cdot 1+2) = 2/5$

Ex.4: $\lim\limits_{x \to 0}(e^{x+1}) = e^{0+1} = e$

Ex.5: $\lim\limits_{x \to 1}(\ln(x^2+1)/(3x+2)) = \ln 2/(3\cdot 1+2) = \ln 2/5$

5.Fie $f:A \to R$, $g:A \to R$, $x_0 \in A'$, $l \in R$, astfel incit :

1) $|f(x)-l| \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in A$

2) $\lim\limits_{x \to x0} g(x) = 0$

atunci $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = l$

6.Fie $f:A \to R$, $g:A \to R$, $h:A \to R$, $x_0 \in A'$, $l \in \overline{R}$, astfel incit :

1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, oricare ar fi $x \in A$

2) $\lim\limits_{x \to x0} g(x) = \lim\limits_{x \to x0} h(x) = l$

atunci $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = l$.

7. Limite de functii remarcabile, cind $x \to x_0$:

1. **lim $P(x)=P(x_0)$, daca $P(x)$ este un polinom cu coeficienti in R**
2. **lim $P(x)/Q(x)= P(x_0)/Q(x_0)$, daca $P(x)$, $Q(x)$ sunt polinoame**
3. **lim $x^\alpha = x_0^\alpha$, $\alpha \in R$ fixat, $x_0 \in (0;\infty)$**
4. **lim $a^x = a^{x_0}$, $a>0$, $a \neq 1$ fixat, $x_0 \in R$**
5. **lim $\log_a x = \log_a x_0$, $x>0$, $a>0$, $a \neq 1$ fixat, $x_0 \in (0; \infty)$**
6. **lim $\sin x = \sin x_0$**
7. **lim $\cos x = \cos x_0$**
8. **lim $\mathrm{tg} x = \mathrm{tg} x_0$**
9. **lim $\mathrm{ctg} x = \mathrm{ctg} x_0$**
10. **lim $\arcsin x = \arcsin x_0$**
11. **lim $\arccos x = \arccos x_0$**
12. **lim $\mathrm{arctg} x = \mathrm{arctg} x_0$**
13. **lim $\mathrm{arcctg} x = \mathrm{arcctg} x_0$**

8. Limite de functii remarcabile, cind $x \to 0$:

1. $\lim \sin x/x = 1$
2. $\lim tgx/x = 1$
3. $\lim \arcsin x/x = 1$
4. $\lim arctgx/x = 1$
5. $\lim \ln(1+x)/x = 1$
6. $\lim (a^x-1)/x = \ln a$, $a>0, a\neq 1$
7. $\lim ((1+x)^\alpha-1)/x = \alpha$ $\alpha \in R$
8. $\lim (1+x)^{1/x} = e$
9. $\lim x^\alpha/a^x = 0$, $a>1, \alpha>0$
10. $\lim \log_a x/x^\alpha = 0$, $a>1, \alpha>0$

9. Limite de functii remarcabile, cind $x \to \pm\infty$

1. $\lim P(x) = \pm\infty$
2. $\lim\limits_{+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} a^x = 0$, $(a>1)$
3. $\lim\limits_{+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{-\infty} a^x = +\infty$, $(0<a<1)$
4. $\lim\limits_{+\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{0} \log_a x = -\infty$, $a>1$
5. $\lim\limits_{+\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{0} \log_a x = +\infty$, $0<a<1$
6. $\lim\limits_{+\infty} arctgx = \pi/2$, $\lim\limits_{-\infty} arctgx = -\pi/2$
7. $\lim\limits_{+\infty} arcctgx = 0$, $\lim\limits_{-\infty} arcctgx = \pi$

1.Inlocuire directa

Metoda inlocuirii directe inseamna ca daca avem de calculat limita functiei f intr-un punct x_0 si putem calcula valoarea functiei $f(x_0)$, adica aceasta este o operatie cu sens, atunci limita este chiar $f(x_0)$: $\lim f(x)=f(x_0)$.

Daca prin inlocuire directa ajumgem la un caz de nedeterminare, adica avem o operatie fara sens, atunci prin artificii de calcul adecvate fiecarui caz in parte incercam sa eliminam nedeterminarea, asa cum vom vedea in continuare..

Inlocuire directa:

Ex.1: $\lim\limits_{0}(x+1) =(0+1)=1$

Ex.2: $\lim\limits_{1}(x^2+1) =$

Ex.3: $\lim\limits_{1}(x^2+2x-7)/(x+3) =$

Ex.4: $\lim\limits_{1}(e^{x+1}) =$

Ex.5: $\lim\limits_{2}(e^{2x-1})/ (x^2+2) =$

Ex.6: $\lim\limits_{e}(\ln(x)) =$

Ex.7: $\lim\limits_{4}(\ln(x-3))/(x+1) =$

Ex.8: $\lim\limits_{4}(\sqrt{x}+\ln(x-3)) =$

Ex.9: $\lim\limits_{4}(1+\ln(x-3))^{1/(1+\ln(x-3))} =$

Ex.10: $\lim\limits_{9}((\sqrt{x}+\ln(x-8)/(x/3-2)) =$

Ex.11: $\lim\limits_{3}((x^2-9)/(x-3))=$

Ex.12: $\lim\limits_{\pi/3}((\sin x)/(x)) =$

Ex.13: $\lim\limits_{2/\pi}(\cos(1/x)) =$

Ex.14: $\lim\limits_{0}(30^x+\arccos(x)) =$

Ex.15: $\lim\limits_{\pi/2}(x+\sin x)/x =$

Limite laterale

Ex.1: $\lim\limits_{x\to 3}((x+9)/(x-3))=12/0$, deci prin inlocuire directa avem o operatie fara sens

Calculam limita la stinga lui 3, adica pentru siruri care tind spre 3 prin valori mai mici decit 3 : $x_n\to 3$ si $x_n<3$ pentru orice n , numar natural. Pentru $x<3$, $x \to 3$, avem $f(x)<0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=12/(-0)=-\infty$**, iar p**entru $x>3$, $x \to 3$, avem $f(x)>0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=12/(+0)=+\infty$

In general daca $a>0$ atunci scriem formal $a/0=+\infty$**, iar daca $a<0$ atunci $a/0=-\infty$.**

Notam cu l_s=limita la stinga si l_d=limita la dreapta. Daca $l_s=l_d$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= l_s=l_d$

2.Cazul de nedeterminare $\infty - \infty$

1) $\lim\limits_{1}(1/(x-1)) - (2/(x^2-1))=\lim\limits_{1}(1/(x+1))=1/2$

2) $\lim\limits_{1}(2/(x^2 -x))-(2/(x-1))=\lim\limits_{1}((2-2x)/(x(x-1)))= \lim\limits_{1}(-2/(x))= -2$

3) $\lim\limits_{\infty}(x - \sqrt{1+x^2})= \lim((x - \sqrt{1+x^2}) (x+\sqrt{1+x^2}))/(x + \sqrt{1+x^2})=$

$\lim\limits_{\infty}((-1)/(x + \sqrt{1+x^2})=0$

4) $\lim\limits_{\infty}(x(\sqrt{1+x^2}-x))= \lim(x(\sqrt{1+x^2}-x)(x+\sqrt{1+x^2}))/(x + \sqrt{1+x^2})=$

$\lim\limits_{\infty}(x)/(x + \sqrt{1+x^2})= \lim(1/(1 + \sqrt{1/x^2+1})=1/2$

6) $\lim\limits_{\infty}((e^{3x} -2e^{x})/(e^{3x} - e^{2x}))= \lim\limits_{\infty}(e^{3x}(1 -2/e^{2x})/(e^{3x}(1 -1/e^{x}))=1$

7) $\lim\limits_{\infty}(x - \sqrt{1+3x+x^2})=$

8) $\lim\limits_{\infty}(\sqrt{x^2+6x+5} -x - 3)x=$

3.Cazul de nedeterminare 0/0

1) $\lim_{1}(x-1)/(x^2-1)=\lim_{1}(1/(x+1))=1/2$

2) $\lim_{1}(\sqrt{x}-1)/(x-1)=\lim_{1}(1/(\sqrt{x}+1))=1/2$

3) $\lim_{1}(\sqrt{x+1}\ -1)/x=\lim_{1}(x/(x(\sqrt{x+1})+1))=\lim_{1}(1/(\sqrt{x+1}+1))=1/(\sqrt{2}+1)$

4) $\lim_{0}(\sin 3x)/(5x)=\lim_{0}(\sin 3x/((3x)5/3)=(3/5)\lim_{0}(\sin 3x/(3x))=3/5$

5) $\lim_{0}(1-\cos^2 2x)/(5x^2)=\lim_{0}(\sin^2 2x/((2x)^2(5/4)))=4/5$

6) $\lim_{0}(\sqrt{\cos x}-1)/(x^2)=\lim_{0}(\cos x-1)/(x^2(\sqrt{\cos x}+1))=$

$\lim_{0}(-2\sin^2 x/2)/((x/2)^2(4)(\sqrt{\cos x}+1))=\lim_{0}(-2)/(4(\sqrt{\cos x}+1))=-1/4$

7) $\lim_{1}(\ln x)/(x^2-1)=\lim_{0}(\ln(t+1)/(t(t+2)))=1/2$

8) $\lim_{0}(e^{3x}-1)/x=\lim_{0}(3t)/(\ln(t+1))=3$ (notam $t=e^{3x}-1$, $x=(1/3)\ln(1+t)$)

9) $\lim_{3}(x\sqrt{x}-27)/(x+5\sqrt{x}-24)=$

10) $\lim_{0}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})/(x)=$

11) $\lim_{1}(\sqrt{4+x}-\sqrt{5x})/(\sqrt{4x+3}-\sqrt{5+2x})=$

12) $\lim_{0}(1-\sqrt{1-x^2})/(x\sin x)=$

13) $\lim_{1}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2)/(x-1)=$

14) $\lim_{0}(\sqrt{x+9}-3)/(\sin(3x))=$

4.Cazul de nedeterminare ∞/∞

1) $\lim_{\infty}(x-1)/(x^2-1)=\lim_{\infty}(1/(x+1))=0$

2) $\lim_{\infty}(x^2+x)/(x^2-1)=\lim_{\infty}(x/(x-1))=\lim_{\infty}(x/(x(1-1/x))=\lim_{\infty}(1/(1-1/x))=1$

3) $\lim_{\infty}(2x^3+x)/(3x^2-1)=+\infty$

4) $\lim_{\infty}(-2x^3+x)/(3x^3-1)=-2/3$

5) $\lim_{-\infty}(-2x^3+x)/(3x^3-1)=-2/3$

6) $\lim_{\infty}((2^{3x}+2^{2x})/(2^{3x}+2^{4x}))=\lim_{\infty}(2^{3x}(1+1/2^x)/(2^{4x}(1/2^x+1))=0$

7) $\lim_{\infty}(2x)/(\sqrt{x^2-1})=$

8) $\lim_{\infty}\ln(x^2-1)/(\ln(x^5-1))=$

9) $\lim_{-\infty}(2x+5)/(\sqrt{x^2+4x-1})=$

4.Cazul de nedeterminare 1^{∞}

1) $\lim\limits_{0}(1+\sin x)^{2/x}=$

2) $\lim\limits_{0}(1+x)^{2\operatorname{cosec} x}=$

3) $\lim\limits_{0}(1+\sin x\, \operatorname{tg} x)^{2/x^{2}}=$

4) $\lim\limits_{2}(1+x^{2}-2^{2})^{2/(x-2)}=$

Functii continue

1. Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct de acumulare al multimii A, iar $f:A \to R$. Spunem ca functia f este continua in x_0 daca $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ex.1: $f(x)=1/(3x+2)$

$\lim\limits_{0} f(x) = 1/2$, deci x=0 este punct de continuitate

$\lim\limits_{-2/3} f(x) = -\infty$, daca $x<-2/3$ si $\lim\limits_{-2/3} f(x) = +\infty$, daca $x>-2/3$

Deci nu exista limita lui f(x) cind $x \to -2/3$, si deci functia nu este continua.

Ex.2: $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ daca } x\in Q \\ 0 \text{ daca } x\in R-Q \end{cases}$ **nu este continua in nici un punct**

2. Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct al multimii A, iar $f:A \to R$. Spunem ca functia f este discontinua in x_0 daca $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ sau limitele laterale in x_0 sunt finite si distincte

3. Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct al multimii A, iar $f:A \to R$. Spunem ca x_0 este un punct de discontinitate de speta 1, daca limitele laterale in x_0 exista si sunt finite si distincte sau daca limitele laterale in x_0 exista si sunt finite si egale , dar diferite de $f(x_0)$.

4. Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct al multimii A, iar $f:A \to R$. Spunem ca x_0 este un punct de discontinuitate de speta 2, daca cel putin o limita laterala in x_0 nu exista sau daca cel putin o limita laterala in x_0 este infinita.

5. Fie I un interval al lui R si $f:I \to R$. Spunem ca functia f, are proprietatea lui Darboux daca pentru orice a,b din I si orice λ intre f(a) si f(b) , exista c intre a si b astfel incit $\lambda = f(c)$.
Se poate demonstra ca pentru orice interval J inclus in I , f(J) este interval si ca orice functie continua pe I are proprietatea lui Darboux. Exista functii discontinue care au proprietatea lui Darboux : $f(x)=\sin(1/x)$ daca $x\neq 0$ si $f(x)=1$ daca $x=0$, nu are limita in $x=0(l_s=-1, l_d=1)$, dar are proprietatea Darboux pe orice interval.

Consecinte:

1. Daca f are proprietatea lui Darboux pe [a;b] si f(a)f(b)<0 atunci exista cel putin un punct c intre a si b astfel incit f(c)=0, deci ecuatia f(x)=0 are solutia x=c.

$f(x)=x^2-1$ pentru $0\leq x\leq 2$, $f(x)=(x+1)/(x-2)$ pentru $-2\leq x\leq 0$

2. Daca f are proprietatea lui Darboux pe I si nu se anuleaza pe intervalul I atunci f pastreaza un semn constant pe I, adica functia este fie pozitiva pe I, fie negativa.

$f(x)=x^2-1$ pentru $x>2$, $f(x)=(x+1)/(x-2)$ pentru $x<-2$

Cercetati daca functia $f: R \longrightarrow R$, este continua in punctul $\mathbf{x_0}$ indicat:

Ex.1: $f(x)=(x+1)/(3x+2)$ in punctul $\mathbf{x_0}=2$, si in $\mathbf{x_0}=-2/3$

Ex.2: $f(x)= x+1$ daca $x<-1$, in punctul $\mathbf{x_0}= -1$, si in $\mathbf{x_0}=1$
x^2-1 daca $x\geq -1$

Ex.3: $f(x)= 1/(x+2)$ daca $x\neq -2$, in punctul $\mathbf{x_0}=2$, si in $\mathbf{x_0}=-2$
1 daca $x=-2$

Ex.4: $f(x)= \ln(x)$ daca $x>0$ in punctul $\mathbf{x_0}=e$, si in $\mathbf{x_0}=0$
1 daca $x=0$

Ex.5: $f(x)= 1/x$ daca $x>0$ in punctul $\mathbf{x_0}=1$, si in $\mathbf{x_0}=0$
1 daca $x\leq 0$

Proprietatea lui Darboux:

Cercetati daca functia $f: I \longrightarrow R$, are proprietatea lui Darboux :

Ex.1: $f(x)=(x+1)/(3x+2)$ pe $I=[0;2]$ (este continua deci Darboux)

Ex.2: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{daca } x<-1 \\ x-1 & \text{daca } x\geq -1 \end{cases}$, $I=[-2;0]$

$f([-3/2;-1/2]) \longrightarrow [-1/2;-3/2]$ Fie $-2/3\in [-3/2;-1/2]$, sa aratam ca nu exista nici un punct $a\in [-3/2;-1/2]$ astfel incit $f(a)=-2/3$. Presupunem ca $f(a)=-2/3$, rezulta $a+1=-2/3$ daca $a<-1$, deci $a=-5/3<-3/2$, adica $a=-5/3\notin [-3/2;-1/2]$. Pentru $a\geq -1$ ecuatia $f(a)=-2/3$ devine $a-1=-2/3$, $a= 1/3$, $a=1/3\notin [-3/2;-1/2]$. Am demonstrat astfel ca $-2/3$ nu este imaginea prin functia f a nici unui element din intervalul [-3/2;-1/2], deci f nu are proprietatea lui Darboux.

Derivate

1. Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct de acumulare al multimii A, iar $f:A \to R$. Spunem ca functia f este derivabila in x_0 daca exista si este finita limita $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ex.1: $f(x)=1/(3x+2)$

$\lim_{x\to 0}(f(x)- f(0))/(x-0) =\lim_{x\to 0}(1/(3x+2)-1/2)/x= \lim_{x\to 0}(-3/(2(3x+2)))=-3/4$

Ex.2: $f(x)=\sqrt{x}$

$\lim_{x\to 1}(f(x)- f(1))/(x-1) =\lim_{x\to 1}(\sqrt{x} - 1)/(x-1)= \lim_{x\to 1}(1/(\sqrt{x}+1))=1/2$

Ex.3: $f(x)=\begin{cases} x \sin(1/x) & \text{daca } x\neq 0 \\ 0 & \text{daca } x=0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0}(f(x)- f(0))/(x-0) =\lim_{x\to 0}(x \sin 1/x)/x= \lim_{x\to 0}(\sin 1/x))=$nu exista, deci $f(x)$=nederivabila

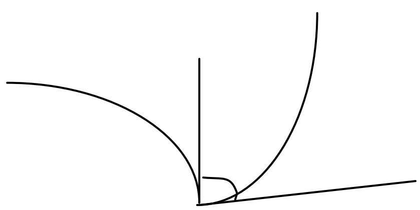
2.Derivatele functiilor elementare

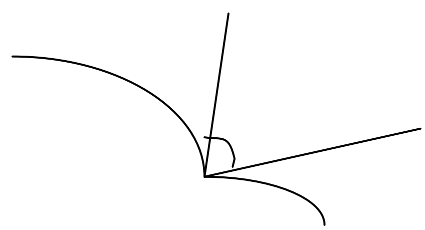
1) $f(x)=c$, $f'(x)=0$, oricare ar fi c real si fixat(o constanta, $f(x)=2$,$f(x)=-1$,...)
2) $f(x)=x^n$, $f'(x)= nx^{n-1}$, oricare ar fi n real ($f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, ...)
3) $f(x)= \sqrt[n]{x}$, $f'(x)=1/(n \sqrt[n]{x^{n-1}})$, n>1 natural ($f(x)= \sqrt[3]{x}$, $f'(x)=1/(3 \sqrt[3]{x^2})$, ...)
4) $f(x)=a^x$, $f'(x)= a^x\ln a$ oricare ar fi $a>0$, $a\neq 1$, real ($f(x)=2^x$, $f'(x)=2^x\ln 2$, ...)
5) $f(x)=\log_a x$, $f'(x)=1/(x\ln a)$, $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$,real ($f(x)= \log_2 x$, $f'(x)=1/(x\ln 2)$)
6) $f(x)=\ln x$, $f'(x)=1/x$, $x>0$, ($f(x)= \ln(x+2)$, $f'(x)=1/(x+2)$, ...)
7) $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, ($f(x)= \sin(x+2)$, $f'(x)=\cos(x+2)$, ...)
8) $f(x)=\cos x$, $f'(x)=-\sin x$, ($f(x)= \cos(x+2)$, $f'(x)=-\sin(x+2)$, ...)
9) $f(x)=\mathrm{tg}x$, $f'(x)=1/\cos^2 x$, ($f(x)= \mathrm{tg}(x+2)$, $f'(x)=1/\cos^2 (x+2)$, ...)
10) $f(x)=\mathrm{ctg}x$, $f'(x)=-1/\sin^2 x$, ($f(x)= \mathrm{ctg}(x+2)$, $f'(x)=-1/\sin^2 (x+2)$, ...)
11) $f(x)=\arcsin x$, $f'(x)=1/(\sqrt{1-x^2})$
12) $f(x)=\arccos x$, $f'(x)=-1/(\sqrt{1-x^2})$
13) $f(x)=\mathrm{arctg}x$, $f'(x)=1/(1+x^2)$
14) $f(x)=\mathrm{arcctg}x$, $f'(x)=-1/(1+x^2)$
15) suma : $(f+g)'=f'+g'$, **produsul:** $(fg)'=f'g+fg'$, $(\lambda f)'=\lambda f'$,
$(f/g)'=(f'g-fg')/g^2$,
16) **Derivatele functiilor compuse:** $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'=g'(f)f'$
17) **Derivatele functiei inverse:** $(f^{-1})'=1/(f'\circ f^{-1})$

2. Interpretarea geometrica a derivatei

1.Fie A o submultime nevida a lui R si x_0 un punct al multimii A, iar $f:A \rightarrow R$. Ecuatia tangentei in punctul $P(x_0 ;f(x_0))$ este de forma:
$y- f(x_0)= f'(x_0)(x- x_0)$, deci $f'(x_0)$ este panta tangentei.

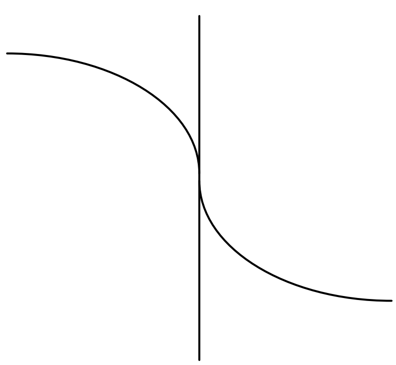
2.Spunem ca punctul $P(x_0 ;f(x_0))$ este un punct unghiular pentru graficul lui f, daca functia nu este derivabila in punctul x_0 , dar cel putin una dintre derivatele laterale este finita, adica ori ambele derivate laterale sunt finite, dar distincte, ori una dintre derivatele laterale este finita , iar cealalta este infinita(in acest caz tangenta este verticala).





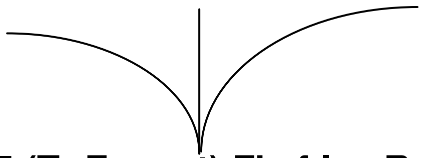
1. $f(x)=|x^2-1|$ pentru $x_0=1$

3.Spunem ca punctul $P(x_0 ;f(x_0))$ este un punct de inflexiune pentru graficul lui f, daca functia nu este derivabila in punctul x_0 , dar ambele derivate laterale sunt infinite si egale, deci tangenta traverseaza graficul.



1. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ pentru $x_0=0$
2. $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ pentru $x_0=2$

4.Spunem ca punctul $P(x_0\ ;f(x_0))$ este un punct de intoarcere pentru graficul lui f, daca functia nu este derivabila in punctul x_0 , dar ambele derivate laterale sunt infinite si distincte.



1. $f(x)= \sqrt{|x-2|}$ pentru $x_0=2$

5.(Tr.Fermat) Fie $f:I \rightarrow R$, derivabila in x_0 ,unde x_0 este un punct interior lui I. Daca x_0 este un punct de extrem al functiei f, atunci $f\ '(x_0)=0$. Adica, derivata se anuleaza intr-un punct de extrem si cum derivata in x_0 este panta tangentei in x_0, rezulta ca tangenta in x_0 este paralela cu axa Ox. Reciproca teoremei nu este adevarata:ex. $f(x)=x^3$. Practic x_0 este un punct de extrem al functiei f, daca si numai daca, $f\ '(x_0)=0$ si f' are semne contrare de o parte si de alta a punctului x_0, deci rezolvam ecuatia $f\ '(x)=0$ si studiem semnul derivatei.

x		x'_1		x'_2		x'_3	....
f'(x)	----------	0	+++	0	+++++	0	- - - -

6.(Tr.Darboux) Fie $f:I \rightarrow R$, derivabila pe I, atunci f ' are proprietatea lui Darboux pe I.

7.(Tr.Rolle) Fie $f:[a;b] \rightarrow R$, cu proprietatile:

1) **f este derivabila pe (a;b),**
2) **f este continua pe [a;b]**
3) **f(a)=f(b)**

atunci exista $c\in (a;b)$ astfel incit $f\ '(c)=0$.

Consecinte: Fie $f : I \rightarrow R$, derivabila pe I atunci:

1) **Intre doua solutii reale ale ecuatiei f(x)=0 exista cel putin o solutie reala a ecuatiei $f\ '(x)=0$, adica exista cel putin un numar $c\in I$ astfel incit $f\ '(c)=0$.**

x	x_1	x'_1		x'_2		x'_3	....	x_2 ....
f'(x)	----------	0	+++	0	---------	0	++++++++	
f(x)	0							0

2) **Intre doua solutii reale x_1' si x_2' consecutive ale ecuatiei $f\ '(x)=0$, adica $f'(x_1')=0$, $f'(x_2')=0$, exista cel mult o solutie reala a ecuatiei f(x)=0, adica exista cel mult un numar $c\in(x_1'\ ;x_2')$ astfel incit f(c)=0 si aceasta se intimpla(exista c) daca $f(x_1')f(x_2')<0$, iar daca $f(x_1')f(x_2')>0$ punctul c nu exista.**

8.(Tr.Lagrange) Fie $f:[a;b] \rightarrow R$, cu proprietatile:
  1) f este derivabila pe (a;b),
  2) f este continua pe [a;b]

atunci exista $c \in (a;b)$ astfel incit $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Consecinte: Fie $f : I \rightarrow R$, derivabila pe I atunci:
1) **f este crescatoare pe I daca si numai daca $f'(x) \geq 0$, oricare ar fi x din intervalul I.**
2) **f este descrescatoare pe I daca si numai daca $f'(x) \leq 0$, oricare ar fi x din intervalul I.**
3) **Daca derivata unei functii pe un interval este nula, atunci functia este constanta pe acel interval.**
4) **Daca doua functii au derivate egale pe un interval, ele difera printr-o constanta pe acel interval.**

9.(Tr. Cauchy) Fie $f,g:[a;b] \rightarrow R$, cu proprietatile:
  1) f si g sunt derivabile pe (a;b)
  2) f si g sunt continue pe [a;b]
  3) si $g'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in (a;b)$
atunci $g(a) \neq g(b)$ si exista $c \in (a;b)$ astfel incit
$(f(b)-f(a))/ (g(b)-g(a))=f'(c)/ g'(c)$

10.(Tr.l'Hospital, cazul 0/0 si cazul ∞/∞)
Fie $f,g : A \rightarrow R$, si x_0 un punct de acumulare pentru intervalul A
Daca :
a) $\lim_{x \to x_0} f(x)=\lim_{x \to x_0} g(x)=0$ sau $\lim_{x \to x_0} f(x)=\lim_{x \to x_0} g(x)=\pm \infty$
b)f si g sunt derivabile pe $A-\{ x_0\}$ si $g'(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in A -\{ x_0\}$
c) $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)=l$ (numarul $l \in R \cup \{-\infty;+\infty\}$)
atunci $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)=l$
(Cu alte cuvinte, in cele 2 ipoteze, limita raportului functiilor f/g este egala cu limita raportului derivatelor f'/g')

11. Daca P(x) este un polinom de gradul n, atunci x=a este radacina multipla de ordinul k, a ecuatiei P(x)=0 daca si numai daca $P(a)= P'(a)= P''(a)=...= P^{(k-1)}(a)=0$ si $P^{(k)}(a) \neq 0$

Consecinte:

a) **Cazul** $\infty-\infty$ se reduce la 0/0 astfel : $f-g=(1/g-1/f)/(1/(fg))$

b) **Cazul** $\infty 0$ se reduce la 0/0 astfel : $fg=g/(1/f)$ sau se reduce la cazul ∞/∞ astfel : $fg=f/(1/g)$

c) **Cazul 1^{∞}** se reduce la 0∞, apoi la 0/0 sau ∞/∞ astfel : prin logaritmare $\ln(f^g)=g(\ln f)=\ldots$

d) **Cazul 0^{0}** se reduce la 0∞, apoi la 0/0 sau ∞/∞ astfel : $\ln(f^g)=g(\ln f)$

e) **Cazul** $\infty^{\mathbf{0}}$ se reduce la 0∞, apoi la 0/0 sau ∞/∞ astfel : $\ln(f^g)=g(\ln f)$

Reprezentarea grafica a functiilor

Pentru a trasa graficul unei functii $f:D \rightarrow R$, parcurgem urmatoarele etape:

1. Domeniul de definitie = stabilim domeniul maxim daca nu este precizat, adica multimea D, a punctelor pentru care operatiile care definesc functia f, au sens
2. Intersectia graficului cu axele de coordonate = aflam coordonatele punctelor P(x;y) care sunt atit pe graficul functiei f cit si pe axe, pe Ox , respectiv Oy.

   Astfel, punctul in care graficul intersecteaza Ox, are coordonatele A(0;y), unde y=f(0). Iar punctul in care graficul intersecteaza Oy, are coordonatele B(x;0), unde x este solutia ecuatiei f(x)=0.

3. Limite, asimptote = aflam limitele functiei in punctele de acumulare in care functia nu este definita, apoi aflam ecuatiile asimptotelor la graficul functiei:

   - asimptotele verticale : x=a daca $\lim_{a} f(x) = \pm\infty$

   $\lim_{\nearrow -1} x/(x+1) = +\infty$ $\quad \lim_{\searrow -1} x/(x+1) = -\infty$, x=-1 este asimptota

   - asimptotele orizontale :$y = \lim_{\pm\infty} f(x)$ $\quad \lim_{\pm\infty} x/(x+1) = 1$

   - asimptotele oblice : $m = \lim_{\pm\infty} f(x)/x$, $\quad n = \lim_{\pm\infty}(f(x)-mx)$

$m = \lim_{\pm\infty}(2x^2)/(x(x+1)) = 2$, $\quad n = \lim_{\pm\infty}(f(x)-mx) = \lim_{\pm\infty}(-2x)/(x+1) = -2$, $y=2x-2$

4. Derivata I = calculam f', rezolvam ecuatia f'(x)=0, aflam coordonatele punctelor in care f nu este derivabila(punctele unghiulare si punctele de intoarcere). Studiem semnul derivatei ($f' \geq 0$ functia f este crescatoare, daca $f' \leq 0$ f este descrescatoare) si aflam coordonatele punctelor de extrem (maxim si minim)($f'(x_0)=0$ si semne contrare in jurul lui x_0
$f'(x_0-\varepsilon) f'(x_0+\varepsilon)<0$), studiem convexitatea(f'=crescatoare) si concavitatea(daca f'= descrescatoare) graficului.

5. Derivata II = calculam f”, rezolvam ecuatia f”(x)=0, aflam coordonatele punctelor in care f nu este derivabila(punctele unghiulare si punctele de intoarcere). Studiem semnul derivatei si aflam coordonatele punctelor de inflexiune(f”(x_0)=0 si f”(x_0-ε) f”(x_0+ε)<0), daca este cazul, studiem convexitatea(tine apa)(f”≥0) si concavitatea(nu tine apa)(f” ≤0) graficului.

6. Tabloul de variatie

x	-∞ $\quad$ x_1' $\quad$ x_1'' $\quad$ x_2' $\quad$ +∞
f’(x)	**(semnul)+ 0 - - - - - 0 + + + +**
f”(x)	**(semnul) - - - 0 + + + + + +**
f(x)	↗ ↗ ↗ **(M)**↘ **(i)**↘ ↘ **(m)** ↗ ↗ ↗

7. Trasarea graficului=trasam graficul punind mai intii punctele remarcabile(m,M,i, intersectiile cu axele, punctele de discontinuitate) si asimptotele, convexitatea/concavitatea, punctele de intoarcere, punctele unghiulare, etc...

Ex. f:D $\longrightarrow$ R , f(x)=(x-1)/(x+1)

1) Domeniul de definitie

D=R-{-1} pentru ca numitorul se anuleaza daca x+1=0, x=-1

2) Intersectiile graficului cu axele

Intersectia cu OY, y=f(0)=-1, A(0 ;-1)

Intersectia cu OX, f(x)=0, x-1=0, x=1, B(1 ;0)

3) Limite, asimptote

$\lim\limits_{\pm\infty}$ f(x)=1, deci dreapta y=1 este asimptota orizontala la ± ∞

Regula: daca sunt asimptote orizontale nu exista asimptote oblice.

Asimptote verticale pentru x=-1 care este punct de acumulare:

$\lim\limits_{\nearrow -1 (<-1)}$ f(x)=+ ∞ $\qquad$ **$\lim\limits_{\searrow -1 (>-1)}$ f(x)=- ∞**, deci dreapta x=-1 este asimptota

4) **Derivata I:** $f'(x)=2/(x+1)^2$

$\lim\limits_{-1} f'(x)= +\infty$, iar semnul lui f ' este evident f '>0

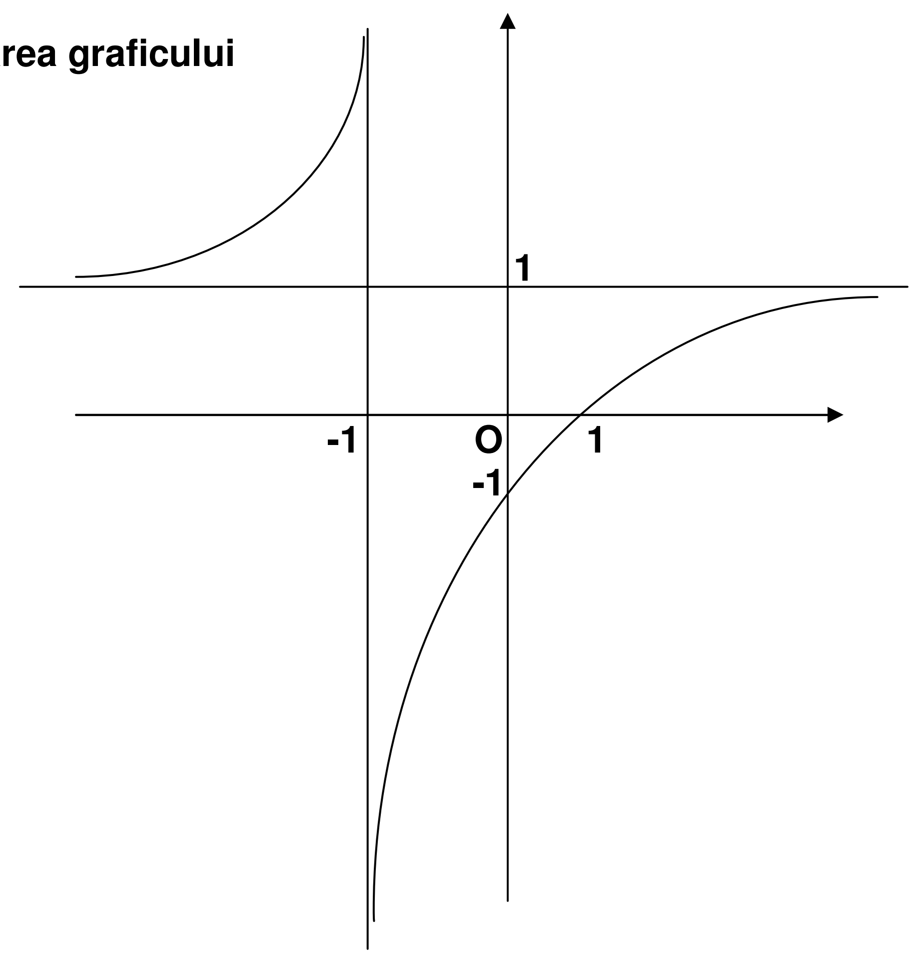
5) **Derivata II:** $f''(x)=- 4/(x+1)^3$

$\lim\limits_{\nearrow -1} f''(x)= +\infty$, $\lim\limits_{\searrow -1} f''(x)= -\infty$, iar semnul lui f " este evident f "<0 **daca x>-1 si f">0 daca x<-1**

6. Tabloul de variatie – ACEST TABLOU ESTE BINE SA-L FACETI DE LA INCEPUT SI SA-L COMPLETATI PE MASURA CE CALCULATI

x	$-\infty$	-1 0 1 $+\infty$
f'(x)	+ + +	+ + + + + + + +
f''(x)	+ + + +	- - - - - - - - - - - - - -
f(x)	1 ↗ ↗ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ (-1) ↗ (0) ↗ ↗ ↗ ↗ 1

7. Trasarea graficului



Ex.2. f:D $\longrightarrow$ R , f(x)=($2x^2$)/(x+1)

1) Domeniul de definitie
D=R-{-1} pentru ca numitorul se anuleaza daca x+1=0, x=-1

2) Intersectiile graficului cu axele
Intersectia cu Ox, y=f(0)=0, O(0 ;0)
Intersectia cu Oy, O(0 ;0)

3) Limite, asimptote
lim f(x)= ± ∞
± ∞
Regula: daca nu sunt asimptote orizontale ar putea sa existe asimptote oblice de forma y=mx+n, unde :
m=limf(x)/x=lim (**$2x^2$)/(x^2+x)=2, n=lim(f(x)-mx)=lim(-2x)/(x+1)=-2**
± ∞ ± ∞ ± ∞ ± ∞
asimptota oblica este dreapta y=2x-2

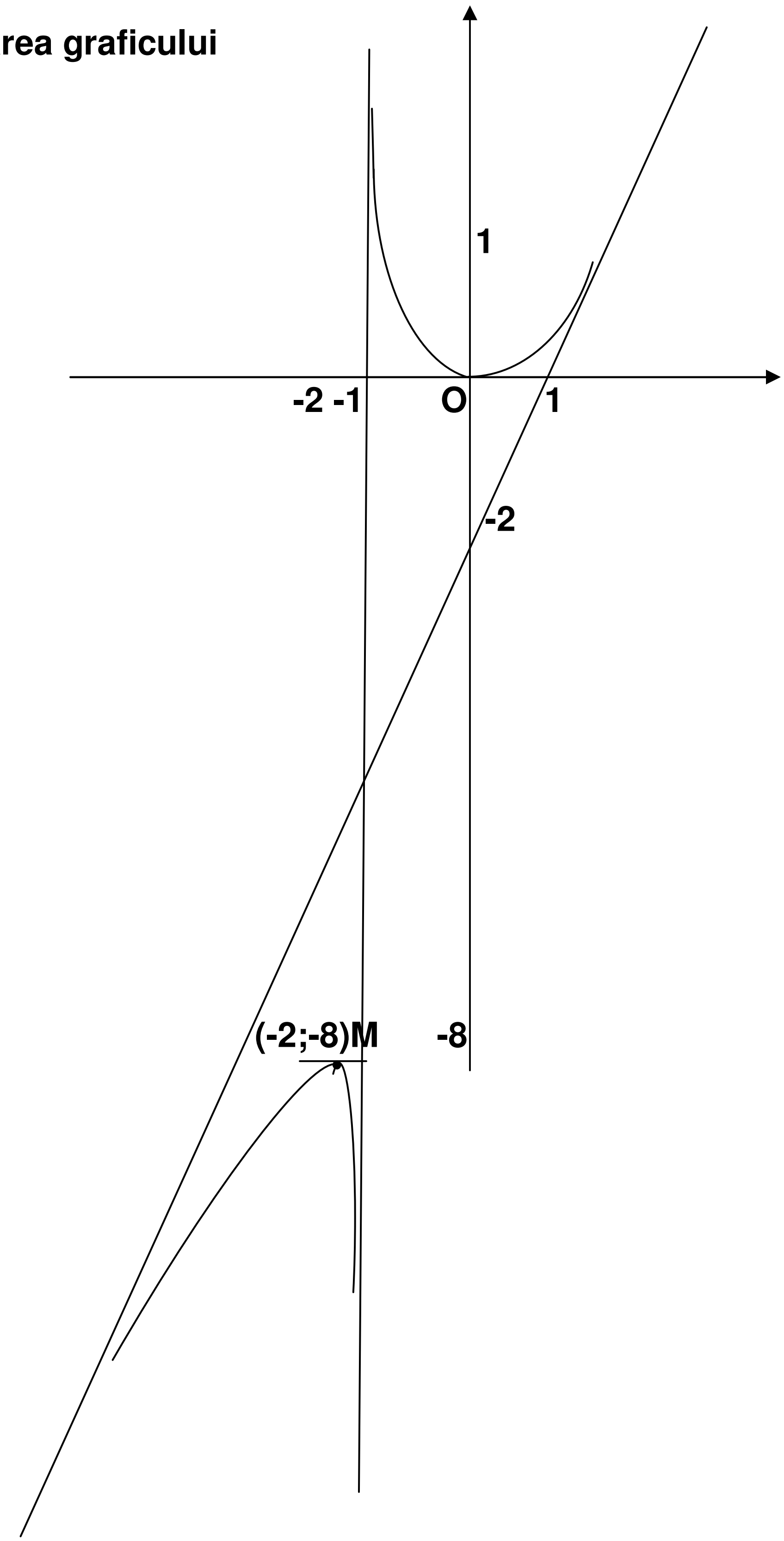
Asimptote verticale pentru x=-1 care este punct de acumulare:
lim f(x)=- ∞ **lim f(x)=+ ∞**, deci dreapta x=-1 este asimptota
$\nearrow$-1(<-1) **$\searrow$-1(>-1)**

4) Derivata I: f'(x)=2x(x+2)/$(x+1)^2$
lim f'(x)= - ∞ , iar semnul lui f ' este f '<0 **daca -2<x<0 si f'>0 daca**
-1 **x<-2 sau x>0**
5) Derivata II: f"(x)= 4(x+1)/$(x+1)^4$
lim f"(x)= - ∞ , **lim f"(x)= + ∞** , iar semnul lui f " este evident f "<0
$\nearrow$-1 **$\searrow$-1**
daca x<-1 si f">0 daca x>-1

6. Tabloul de variatie

x	-∞	-2	-1	0		+∞
f'(x)	**+**	**+(0)**	**-** | **- - -**	**(0)**	**+ + + + + +**	
f"(x)	**- - - - -**		| **+**	**+**	**+ + + +**	
f(x)	**-∞$\nearrow$**	**$\nearrow$ (-8)$\searrow$ M**	**-∞ | +∞$\searrow$**	**(0)$\nearrow$ m**	**$\nearrow$ $\nearrow$ $\nearrow$ $\nearrow$**	**+∞**

7. Trasarea graficului



Primitive

1.Fie f:I R, I=interval. Functia F:I R cu proprietatile:

a) F este derivabila pe I

b) F'(x)=f(x) pentru orice x din intervalul I

se numeste primitiva a lui f pe I.

Scriem : $\int f(x)dx=F(x)+C$, deaorece daca $F'(x)=f(x)$ atunci si $(F(x)+C)'=f(x)$, unde C este o constanta reala oarecare.

1. $\int 0dx=C$
2. $\int dx=x+C$
3. $\int xdx=x^2/2+C$
4. $\int x^2dx=x^3/3+C$
5. $\int x^3dx=x^4/4+C$
6. $\int x^ndx=x^{n+1}/(n+1)+C$
7. $\int (1/x)dx=\ln|x|+C$
8. $\int (a^x)dx=(a^x)/\ln a+C$
9. $\int (1/(x^2-a^2))dx=(1/(2a))\ln|(x-a)/(x+a)|+C$
10. $\int (1/(x^2+a^2))dx=(1/(a))\mathrm{arctg}(x/a)+C$
11. $\int (1/\sqrt{(a^2-x^2)})dx=\arcsin(x/a)+C$
12. $\int (1/\sqrt{(x^2+a^2)})dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
13. $\int (1/\sqrt{(x^2-a^2)})dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\ |+C$
14. $\int \sin xdx=-\cos x+C$
15. $\int \cos xdx=\sin x+C$
16. $\int (1/\cos^2x)dx=\mathrm{tg}x+C$
17. $\int (1/\sin^2x)dx=\mathrm{ctg}x+C$
18. $\int (\mathrm{tg}x)dx=-\ln|\cos x|+C$
19. $\int (\mathrm{ctg}x)dx=\ln|\sin x|+C$

2.Fie f,g:I   R, I=interval doua functii derivabile cu derivate continue pe I, atunci(formula de integrare prin parti) :

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

$\int x\ln x dx=\int(\ln x)(x^2/2)'dx=(\ln x)(x^2/2) - \int(\ln x)'(x^2/2)dx=(\ln x)(x^2/2) - \int(1/x)(x^2/2)dx=(\ln x)(x^2/2) - \int(x/2)dx=(\ln x)(x^2/2) - (1/2)\int xdx=(\ln x)(x^2/2) - (1/2)\ (x^2/2)+C=(\ln x)(x^2/2) - (x^2/4)+C=...$

Obs.: formula da rezultate daca :

a) f(x)=P(x)=polinom si g(x)=lnx
b) f(x)=P(x)=polinom si g(x)=ln
c) f(x)=P(x)=polinum si g(x)=e^x
d) f(x)=P(x)=polinum si g(x)=sinx, g(x)=cosx, g(x)=arcsinx, g(x)=arccosx, g(x)=arctgx, g(x)=arcctgx,

Ex.1. $\int x^2e^xdx= x^2e^x - \int e^x(x^2)'dx= x^2e^x - \int e^x(2x)dx= x^2e^x –(2xe^x - \int e^x(2x)'dx)= x^2e^x –(2xe^x - 2\int e^xdx)= x^2e^x –(2xe^x - 2e^x)=....$

3. Fie f:I   J si g:J   R
Daca : a) f este derivabila
b) g admite primitiva G
atunci $\int g(f(x))f'(x)dx=G(f(x)) + C$

Ex.1. $\int(2x)/(x^2+5)dx= \int(1/t)dt=\ln|t|+C$, am **notat t=** x^2+5, rezulta dt=2xdx, am facut deci o schimbare de variabila

4.Fie f:[a;b]   R, continua si functia F:[a;b]   R o primitiva a lui f pe [a;b](formula Leibniz-Newton).

Scriem : $\int_a^b f(x)dx=F(b) – F(a)$ si citim integrala de la a la b.

iar interpretarea geometrica a integralei(un numar) este ca ea reprezinta aria dintre grafic axa Ox si dreptele x=a si x=b.

Ex.1. $\int_0^1 xe^x dx = F(1) - F(0) = -1$

Calculam mai intii primitivele $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx =$ $xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1) = F(x)$, **deci** $F(1) - F(0) = -1$

Ex.2. Sa calculam aria cuprinsa intre dreptele x=0 si x=1 si graficul functiei f(x)= $\sqrt{1+x}$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = (2/3)(1+x)\sqrt{1+x}\,\Big|_0^1 = F(1) - F(0) = (2/3)(2\sqrt{2} - 1)$$

Calculam mai intii primitivele :

$$\int \sqrt{1+x}\,dx = (2/3)(1+x)\sqrt{1+x} + C = F(x)$$

Structuri algebrice

1. Fie M o multime nevida. Orice functie f, definita pe MxM cu valori in M, $f:M\times M \longrightarrow M$ se numeste lege de compozitie pe M. Notam $f(x;y)=x\circ y$, iar legea notata cu $\circ$, poate fi + sau ·/x, sau orice alta operatie definita ca mai sus si notata cu un semn oarecare($\circ$, $\square$, $\triangle$, $\circledcirc$, ...).

2. Fie $f:Z\times Z \longrightarrow Z$, $f(x;y)=x+y-2\in Z$, Notam $x\circ y=x+y-2$.
De exemplu : $2\circ 3=2+3-2=3\in Z$, $-2\circ(-3)=-2-3-2=-7\in Z$, etc…
Deci oricare ar fi $x;y\in Z$, avem evident si $f(x;y)=x+y-2\in Z$, deci legea de compozitie este bine definita.

3. Fie $f:R_+^* \times R_+^* \longrightarrow R_+^*$, $f(x;y)=(x+y)/2\in R_+^*$, Notam $x\circ y=(x+y)/2$.
De exemplu : $2\circ 3=(2+3)/2=5/2\in R_+^*$, $1/2\circ(2/3)=(7/6)/2=7/12\in R_+^*$, etc…
Deci oricare ar fi $x;y\in R_+^*$, avem evident si $f(x;y)=(x+y)/2\in R_+^*$, deci legea de compozitie este bine definita.

4. Fie $M_2(Z)$ multimea matricelor de ordinul 2 cu elemente din Z, adica matrice de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a;b;c;d\in Z$
Fie A multimea matricelor din $M_2(Z)$ de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ cu $a;b;d\in Z$
Sa aratam operatia de inmultire obisnuita a matricelor este o lege de compozitie bine definita pe A, adica sa aratam ca inmultirea a doua matrice din A este tot o matrice din A.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & dz \end{pmatrix} \in A$$

5. Fie G={e;a;b;c} si $f:G\times G \longrightarrow G$, o lege de compozitie cu proprietatile $e^2=e$,$a^2=e$ si $c^2=e$, se cere sa completati tabla operatiei care este compatibila cu proprietatile date.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	?	?
b	b	?	?	?
c	c	?	?	e

6. Fie $U_3=\{z\in C/\ z^3=1\}$ si operatia de inmultire obisnuita a numerelor complexe. Sa aratam ca inmultirea numerelor complexe este o lege de compozitie pe U_3, adica sa aratam ca inmultirea a doua numere din U_3 este un element din U_3.
$z_1=1$, $z_2=(-1+i\sqrt{3})/2$, $z_3=(-1-i\sqrt{3})/2$
Deci: $z_1z_2=z_2$, $z_1z_3=z_3$, $z_2z_3=((-1+i\sqrt{3})/2)((-1-i\sqrt{3})/2)=((-1)^2-(\ i\sqrt{3})^{\,2})/4=$ $(1-(\ i)^{\,2}(\sqrt{3})^{\,2})/4=(1-(\ -1)(3))/4=(1-(\ -3))/4=(1+3)/4=4/4=1=z_1$

7. Pentru orice n>0 din Z, fixat si $a\in Z$ exista $q,r\in Z$, unic determinati astfel incit : $a=nq+r$, $0\le r<n$.(Tr.impartirii cu rest)
Numarul r din relatia de mai sus il notam cu r = a mod n , si citim a modulo n, deci r este restul modulo n sau redusul modulo n al numarului intreg n.
Astfel , pentru n=5 numarul r poate fi 0;1;2;3;4, daca n=8 atunci r poate fi 0;1;2;3;4;5;6;7, etc ...
Rezulta ca: 8 mod 8 = 0, 9 mod 8 = 1, 10 mod 8 = 2, 11 mod 8 = 3, 12 mod 8 = 4, 13 mod 8 = 5, 14 mod 8 = 6, 15 mod 8 = 7, 16 mod 8 = 0, 17 mod 8 = 1, 18 mod 8 = 2, 19 mod 8 = 3, etc ...
Definim adunarea si inmultirea modulo n astfel:
$a\oplus b = (a+b) \bmod n$
$a\odot b = (ab) \bmod n$
Ex.1. Alcatuiti tablele operatiilor de adunare si inmultire modulo 5 si modulo 8:

⊕	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

⊙	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	5

⊕	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

⊙	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	3	4	3	2	1

9.O lege de compozitie este :
a) asociativa daca (x*y)*z=x*(y*z)
b) comutativa daca x*y=y*x
c) o lege definita pe M are element neutru e∈M daca
e*x=x*e=x, oricare ar fi x∈M
d) Fie (*) o lege definita pe M care are element neutru e∈M si este asociativa daca doua elemente x,x'∈M verifica relatia x'*x =x*x' =e, atunci x' este simetricul lui x. Se mai spune ca x este simetrizabil. Se poate demonstra ca x' este unic daca exista si (x*y)'=y'*x', iar (x')'=x.

10. Fie (G;*) o multime nevida si cu o lege de compozitie cu urmatoarele proprietati:
a) asociativa : (x*y)*z=x*(y*z)
b) exista e∈G astfel incit e*x=x*e=x, oricare ar fi x∈G
c) oricare ar fi x∈G exista x'∈G astfel incit x'*x =x*x' =e
Daca, in plus, legea de compozitie este si comutativa, adica x*y=y*x oricare ar fi x,y∈G, atunci grupul este comutativ sau abelian.
Intr-un grup G, daca a*x=a*y atunci x=y , iar daca x*a=y*a atunci x=y(simplificarea la stinga respectiv simplificarea la dreapta).
Intr-un grup G, ecuatia a*x=b are solutia unica x=a'*b, iar ecuatia y*a=b are solutia unica y=b*a'.

11. Fie (G;*) si (H;o) doua grupuri si f:G $\longrightarrow$ H o functie bijectiva. Daca f(x*y)=f(x)of(y), pentru orice x;y∈G atunci f se numeste izomorfism de grupuri.
Se poate demonstra ca daca f este izomorfism de grupuri atunci si f^{-1}(functia inversa a lui f) este izomorfism de grupuri.

12. O multime nevida (A;+;·) inzestrata cu doua legi de compozitie se numeste inel daca :
G) (A;+) este grup abelian
M) (A; ·) este grup monoid(· este operatie asociativa si cu element neutru)
D) inmultirea este distributiva fata de adunare , adica:
x(y+z)=xy+xz, (y+z)x=xy+zx, oricare ar fi x ;y ;z∈A

Daca inmultirea este comutativa atunci inelul este comutativ.

Un inel este inel fara divizori ai lui zero daca pentru $x \neq 0$ si $y \neq 0$ avem si $xy \neq 0$. Un inel comutativ cu cel putin doua elemente si fara divizori ai lui zero se numeste domeniu de integritate.

Fie A si B doua inele si $f:A \longrightarrow B$ o functie bijectiva. Daca $f(x+y)=f(x)+f(y)$ si $f(xy)=f(x)f(y)$, pentru orice $x;y \in A$, atunci f este izomorfism de inele.

13. Un inel $(K;+;\cdot)$ inzestrata cu doua legi de compozitie se numeste corp daca :
e) $0 \neq 1$
s) oricare ar fi $x \in K$ exista $x' \in K$ astfel incit $x'x = xx' = 1$

Daca inmultirea este comutativa atunci corpul este comutativ.

Fie K si K' doua corpuri si $f:K \longrightarrow K'$ un izomorfism de inele. Spunem ca f este izomorfism de corpuri.