Numere complexe

1.Multimea numerelor complexe este $C=RxR=\{(a;b)/a,b\in R\}$ cu operatiile:
$z_1=(a_1;b_1)$, $z_2=(a_2;b_2)$ $a_1;b_1;a_2;b_2\in R$, $z_1+z_2=(a_1+a_2;\ b_1+b_2)$,
$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2;\ a_1b_2+a_2b_1)$,
Partea reala $(a;0)=a\in R$, prin definitie $i=(0;1)$, deci $i^2=-1$, partea imaginara $bi=(b;0)\ (0;1)=(0;b)=ib$, deci $z=(a;b)=(a;0)+(0;b)=a+bi$

Ex.1:
a) Fie $z=2-3i$, partea reala $=2$, partea imaginara$=-3i$, coeficientul partii imaginare$=-3$.
b) Fie $z_1=(2;-1)$, $z_2=(-3;5)$, calculati z_1+z_2; $z_1\cdot z_2$
deci $z_1+z_2=(2-3;-1+5)=(-1;4)$ sau direct $z_1=2-i$, $z_2=-3+5i$ si
$z_1+z_2=(2-i)+(-3+5i)=(2-3)+i(-1+5)=-1+4i$
produsul $z_1z_2=(2(-3)-(-1)(5);2\cdot5+(-1)(-3))=(-1;13)$ sau direct $z_1=2-i$,
$z_2=-3+5i$ si $z_1z_2=(2-i)(-3+5i)=(2)(-3)+2(5i)+(-i)(-3)+(-i)(+5i)=$
$-6+10i+3i-5i^2=-6+13i-5(-1)=-1+13i$, am facut inmultirea parantezelor

2.Forma algebrica a unui numar complex este : $z=a+bi$, unde partea reala este $a=Re(z)$, coeficientul partii imaginare este $b=Im(z)$, partea imaginara este bi, iar $a,b\in R$ si $i^2=-1$.

Ex.2: Fie $z=1-2(1+i)=1-2-2i=-1-2i$, deci $a=-1$ si $b=-2$

3.Doua numere complexe z_1 si z_2 sunt egale daca $a_1=a_2$ si $b_1=b_2$,unde $z_1=(a_1;b_1)$, $z_2=(a_2;b_2)$.

Ex.3: Fie $z_1=-3-i$, $z_2=-1+3i$ si evident nu sunt egale , in schimb
$z_1=-3-i$, $z_2=-1-7i+2(-1+3i)=-1-7i-2+6i=-3-i$, sunt egale

4.Inversul lui $z=a+bi$ este nr.complex, z' cu proprietatea ca $zz'=1$, rezulta $z'=a/(a^2+b^2)-(bi)/(a^2+b^2)$ si notam $z'=z^{-1}$

Ex.4: Fie $z_1=-3-i$, $a=-3$ si $b=-1$, deci $z'z_1=1$, rezulta prin calcul elementar , adica fara a aplica formula de mai sus :
$z'=1/z_1=1/(-3-i)=(-3+i)/((-3-i)(-3+i))=(-3+i)/((-3)^2-(i)^2)=$
$(-3+i)/(9-(-1))=(-3+i)/10=-3/10+i/10$, rezulta ca $z'=-3/10+i/10$
Pentru $z_2=-1+3i$, avem $z'=1/z_2=-1/10-3i/10$

5. Puterile lui i :
Avem si relatiile: $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$

Ex.5: Calculati : $i^2=-1$, $i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1$, $i^7=i^4\ i^3=i^4i^2i=-i$, etc...., $i^{2000}=i^{4\cdot500}=1$, $i^{2001}=i^{2000+1}=i^{4\cdot500+1}=1\cdot i=i$, etc...

6. Conjugatul lui $z=a+bi$ este $\overline{z}=a-bi$ si se vede ca $z\overline{z}=a^2+b^2>0$, $a=(z+\overline{z})/2$, $ib=(z-\overline{z})/2$,
Se vede ca $z\in R$ este echivalent cu $z=\overline{z}$, iar
$\overline{z}$ este imaginar daca si numai daca $z=-z$

Ex.6: Fie $z_1=-3-i$, $z_2=-1+3i$, avem $\overline{z}_1=-3+i$, $\overline{z}_2=-1 - 3i$

7. Modulul lui $z=a+bi$ este $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ si $|z|^2 = z\overline{z}$

Ex.7: Fie $z_1=-3-i$, $z_2=-1+3i$, avem $|z_1|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

8. Forma trigonometrica a unui numar complex:
$z=a+bi=r(\cos u+i\sin u)$, deci $a=r\cos u$ si $b=r\sin u$
$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, iar $u\in[0;2\pi]$, $\cos u=a/r$, $\sin u=b/r$
Fie $z=r(\cos u+i\sin u)$ si $w=a'+b'i=r'(\cos v+i\sin v)$
$zw=rr'(\cos(u+v)+i\sin(u+v))$
$z/w=r/r'(\cos(u-v)+i\sin(u-v))$
$1/z=1/r(\cos(-u)+i\sin(-u))$
$z^n=r^n(\cos(nu)+i\sin(nu))$ $Arg(z)=\{arg(z)+2k\pi / k\in Z\}$

Ex.8: Fie $z_1=-1-i$, $z_2=-1+i$ si $r_1=|z_1|=\sqrt{2}$, $r_2=|z_2|=\sqrt{2}$, $\cos u_1=-1/\sqrt{2}$, iar $\sin u_1=-1/\sqrt{2}$, dar ambele functii trigonometrice sunt negative, in acelasi timp, in cadranul 3, deci u_1 este in cadranul 3, adica este de forma $u_1=\pi+\pi/4$, rezulta ca forma trigonometrica pentru z_1 este :
$z_1=r_1(\cos u_1+i\sin u_1)=\sqrt{2}(\cos(\pi+\pi/4)+i\sin(\pi+\pi/4))=\sqrt{2}(\cos 5\pi/4+i\sin 5\pi/4)$
Pentru z_2 avem $\cos u_1=-1/\sqrt{2}$, iar $\sin u_1=1/\sqrt{2}$, dar ambele functii trigonometrice sunt de semne contrare (cos negativ si, in acelasi timp, sin pozitiv) in cadranul 2, deci u_2 este in cadranul 2, adica este de forma $u_2=\pi/2+\pi/4$, rezulta ca forma trigonometrica pentru z_2 este :
$z_2=r_2(\cos u_2+i\sin u_2)=\sqrt{2}(\cos(\pi/2+\pi/4)+i\sin(\pi/2+\pi/4))=\sqrt{2}(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)$

9. Formula lui Moivre:
$(\cos u+i\sin u)^n=\cos(nu)+i\sin(nu)$
N.B. Putem calcula si direct $z_1^3=(-1-i)^3=(-1)^3-(i)^3-3(-1)^2(i)+3(-1)(i)^2=$ $-1+i-3i+3=2(1-i)=(\sqrt{2})^3(\cos 15\pi/4+i\sin 15\pi/4)$, cu formula $(a-b)^3$ si asa cum se vede mai jos, dar nu putem calcula direct z_1^{30002} asa ca ....

Ex.9: Fie $z_1=-1-i$, $z_2=-1+i$ si $r_1=|z_1|=\sqrt{2}$, $r_2=|z_2|=\sqrt{2}$,
$z_1=r_1(\cos u_1+i\sin u_1)=\sqrt{2}(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4))$
z_2 este : $z_2=r_2(\cos u_2+i\sin u_2)=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$
Sa calculam z_1^3 si z_2^8: avem, conform formulei lui Moivre,
$z_1^3=(\sqrt{2})^3((\cos 3(5\pi/4)+i\sin 3(5\pi/4)))=(\sqrt{2})^3(\cos 15\pi/4+i\sin 15\pi/4)$
$z_2^8=(\sqrt{2})^8((\cos 8(3\pi/4)+i\sin 8(3\pi/4)))=(\sqrt{2})^8(\cos 6\pi+i\sin 6\pi)$

10. Extragerea radacinii de ordinul n dintr-un numar complex scris sub forma trigonometrica:

$z=a+bi=r(\cos u+i\sin u)$, deci $a=r\cos u$ si $b=r\sin u$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$z_k=\sqrt[n]{r}(\cos((u+2k\pi)/n)+i\sin((u+2k\pi)/n))$, unde $k=0;1;2;...;n-1$

Ex.10: Fie $z_1=-1-i$, $z_2=-1+i$ si $r_1=|z_1|=\sqrt{2}$, $r_2=|z_2|=\sqrt{2}$,

$z_1=r_1(\cos u_1+i\sin u_1)=\sqrt{2}(\cos 5\pi/4+i\sin 5\pi/4)$

$z_2=r_2(\cos u_2+i\sin u_2)=\sqrt{2}(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)$

Sa calculam $z_1^{1/3}$ si $z_2^{1/8}$: avem, conform formulei :

$(z_1)_k=z_1^{1/3}=(\sqrt{2})^{1/3}(\cos(5\pi/4+2k\pi)/3+i\sin(5\pi/4+2k\pi)/3)$ si $k=0;1;2$

$z_0=(\sqrt{2})^{1/3}(\cos 5\pi/12+i\sin 5\pi/12)$ $z_2=(\sqrt{2})^{1/3}(\cos 13\pi/12+i\sin 13\pi/12)$ $z_3=$ ...

$(z_2)_k=z_2^{1/8}=(\sqrt{2})^{1/8}((\cos(3\pi/4+2k\pi)/8+i\sin(3\pi/4+2k\pi)/8))$ $k=0;1;2;...;7$

11. Ecuatii binome:

$z^n+a=0$, $a\in C$, $n>=2$, $n\in N$, $z^n=-a=r(\cos u+i\sin u)$, $r=|z|$

$z_k=r^{1/n}(\cos((u+2k\pi)/n)+i\sin((u+2k\pi)/n))$, unde $k=0;1;2;...;n-1$

Ex.11: Fie ec. $z^4=-1$, si $r=|z|=1$,

$z=r(\cos u+i\sin u)=\cos\pi+i\sin\pi$, deci solutia ec.este $z=\sqrt[4]{-1}$

Sa calculam $z^{1/4}$, conform formulei :

$z_k=z^{1/4}=\cos(\pi+2k\pi)/4+i\sin(\pi+2k\pi)/4$

unde $k=0;1;2;3$,adica sunt 4 radacini, notate z_0, z_1, z_2, z_3 , si

pentru $k=0$, avem $z_0=\cos\pi/4+i\sin\pi/4$

pentru $k=1$, avem $z_0=\cos(\pi+2\pi)/4+i\sin(\pi+2\pi)/4$

pentru $k=2$, avem $z_0=\cos(\pi+4\pi)/4+i\sin(\pi+4\pi)/4$

pentru $k=3$, avem $z_0=\cos(\pi+6\pi)/4+i\sin(\pi+6\pi)/4$

Fie ec. $z^{64}=-1-i$, si $r=|z|=\sqrt{2}$,

$z=r(\cos u_1+i\sin u_1)=\sqrt{2}(\cos(\pi+\pi/4)+i\sin(\pi+\pi/4))$

Sa calculam $z^{1/64}$, conform formulei :

$z_k=z^{1/64}=\sqrt{2}^{1/64}((\cos((5\pi/4)+2k\pi)/64+i\sin((5\pi/4)+2k\pi)/64))$

unde $k=0;1;2;...;63$

Exercitii suplimentare:

Ex.1. Calculati $z_1+ z_2$ si $z_1- z_2$: a) $z_1=1+2i$, $z_2=2+3i$
b) $z_1=5+2i$, $z_2=2-3i$ c) $z_1=4-3i$, $z_2=-3+5i$

Ex.2. Calculati z_1z_2 si z_1/z_2 : a) $z_1=1-2i$, $z_2=5+3i$
b) $z_1=-5+4i$, $z_2=2-3i$ c) $z_1=-3i$, $z_2=-5i$

Ex.3. Determinati x si y astfel incit sa fie adevarate egalitatile:
a) $(x-2y) +(-2x+5y)i=3(1-3i)$ b) $x-3i+(y-3)i=5+4i$ c) $x-3i+5=7-(y+2)i$
d) $2x+ix-3y+5iy=-5+30i$

Ex.4. Determinati opusele numerelor: a) $1-i$ b) $2+i$ c) $-1+3i$
d) $-2-5i$ e) -7 f) $-2i$ g) $-3i-8$ h) $-2 +3(-2-2i)$

Ex.5. Calculati z^{-1} daca : a) $z=1-i$ b) $z=1+2i$
c) $z=-3+i$ d) $z=-2i$ e) $z=-2-i$ f) $z=3-2i$ g) $z=-1-i$

6.Sa se arate ca numerele complexe urmatoare au modulul 1 :
a) -1 b) i c) $-i$ d) 1 e) $1+3i$ f) $\sin 30^0 +i\cos 30^0$ g) $\cos 5-i\sin 5$

7.Sa se determine partea reala a numarului complex: a) $11+i$
b) $(3+i)(3-i)$ c) $3/(2-i)$ d) $(1-2i)/(3+i)$ e) i^6 f) $(1+i)^4$ g) $(2+i)(1-2i)$
h) $i^5 +i^3 + i^2 + i^1$ i) $2-2(1+i)$ j) $(2+i)(-1-i)$ k) $\cos 3+i\sin 3$
l) $(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)^3$ m) $(-1-i)^2 -(-1+2i)^2$ n) $(-i)^5 -(1-i)^2$ o) $(-i)^{20}$

8.Sa se calculeze modulul numarului complex:
a) $(-i)^5$ b) $(-2)(-1-i)$ c) $(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)^4$ c) $(-1-i)/(-2+i)$
d) i^{2000} e) $(1-2i)^{24}$ f) $\sqrt{3}/2-i$ g) $\cos 1+i\sin 1$ h) $\sin 1-i\cos 1$ h) $-i^3-2$
i) $1/2-i/4$ j) $\sqrt{2}/2-\sqrt{2}i/2$ k) $-i$ l) $((-i+1)/(-1-i))^2$ m) $(\cos 3\pi/2+i\sin 3\pi/2)^{2007}$
n) $i^8 +i^6 +i^4$ o) $1/5-i2/5$ p) $(2-i)/(1+i)$ r) $((-i+1)/(-1-i))^2$ s) $-i/(2-i)$

9) Sa se detemine conjugatul numarului complex:
a) $-1-i^{100}$ b) $-\sqrt{2}i/2$ b) $-1-i$ b) $1/4+i$ b) $\sqrt{3}/2-2i$ b) $\sqrt{3}/2+ \sqrt{2}i/2$
c) $i^4 +i^2$ d) $i^8 +i^2$ e) $(1+i)^2 - (-2-i)^2$

10.Rezolvati in multimea numerelor complexe ecuatiile :
a) $z^2-2z+5=0$ b) $z^3-1=0$ c) $z^8=-1$ d) $z^5=(1-i)^6$ e) $z^5=1$
f) $(-2-z)^2+z-12=0$ g) $z^3+8=0$ h) $-z^2+7z-15=0$

Exercitii tip BAC-2007

1.Sa se determine partea reala a numarului complex: a) $1-3i$
b) $(1+2i)(3-i)$ c) $1/(2+3i)$ d) $(1-5i)/(2+3i)$ e) i^{10} f) $(2+i)^{10}$
g) $(2-i)^2 -(1+2i)^2$ h) $i^{10} + i^8 + i^6 + i^4 + i^2 + i^1$ i) $1-3(1-2i)$
j) $(1+i)(-3-i)$ k) $\cos 30^0+i\sin 30^0$ l) $(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)^5$

2.Sa se calculeze modulul numarului complex:
a) $(2-i)^5$ b) $(i-2)(1-2i)$ c) $(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)^5$ c) $(1-5i)/(2+3i)$
d) i^{100} e) $(3-2i)^{10}$ f) $\sqrt{3}-2i$ g) $\cos 3+i\sin 3$ g) $\sin 3-i\cos 3$ h) i^3+1
i) $1/2+i$ j) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ k) $-2i$ l) $((i+1)/(1-2i))^2$ c) $(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)^{2007}$
m) $i^8 +i^6 +i^4 +i^2 + i^1 + i^3 +i^5 +i^7$ k) $1/2-i3/4$

3.Sa se determine $a,b\in R$ astfel incit sa avem egalitatea de numere complexe:
a) $(\cos\pi+i\sin\pi)^5=a+bi$ b) $(1-i\sqrt{3}/2)^5=a+bi$
c) $(\cos 2\pi/5+i\sin 2\pi/5)^5=a+bi$ d) $(3-2i)^{10}=a+bi$
e) $(1-2i)/(2+3i) =a+bi$ f) $(1+2i)(2-i) =a+bi$
g) $(\cos 45^0+i\sin 45^0)^4=a+bi$ h) $(\cos 5^0+i\sin 5^0)^{72}=a+bi$
i) $(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)^5=a+bi$
j) $(2-i)^{14} =a+bi$ k) $(\sin 15^0+i\cos 15^0)^4=a+bi$
l) $((1-i\sqrt{3})/2)^5=a+bi$ m) $1-(1-ai)^2 =1$
n) $(\cos 1^0+i\sin 1^0)^{270}=a+bi$ j) $(-1+i)^{40} =a+bi$

4) Sa se determine inversul numarului complex:
a) 5 b) $1/2$ c) $-3/4$ d) $-2i$ e) $-1/(2i)$ f) $2i/(-i)$ g) $1+i$ h) i^2 i) i^{100}
j) $i^2 + i^4$ k) $(2-i)^{10}$ l) $(\sin 15^0+i\cos 15^0)^4$ m) $(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)^2$
l) $(\sin 30^0+i\sin 60^0)^6$ m) $(\cos\pi/6+i\sin\pi/4)^2$

5) Sa se calculeze in multimea numerelor complexe:
a) $i^{100}\, i^{80}\, i^{60}\, i^{40}\, i^{20}\, i^2$ b) $i^{11} +i^9 +i^7 +i^5 +i^3 +i^1$
c) $1/i^{100} +1/i^{80} +1/i^{60} +1/i^{40} +1/i^{20} +1/i^2$
d) $1+1/i^1 +1/i^3 +1/i^5 +1/i^7 +1/i^9 +1/i^{11}$
e) $i^2 +i^4 +i^5$ f) $(1+i)^3 - (2-i)^3$ g) $i^{2005} +i^{2006} +i^{2007}$
h) $(1-i)^2 - (2-3i)^2$ g) $i^{2005}i^{2006}i^{2007}$

6.Sa se scrie 2 numere complexe care au modulul 1.

7.Rezolvati in multimea numerelor complexe ecuatiile :
a) $z^2+z+3=0$ b) $z^3+1=0$ c) $z^4=-1$ d) $1-(2zi)^4 =0$ e) $z^6=1$

f) $(1-z)^2-3z+8=0$ g) $z^6+8=0$ h) $-2z^2+5z-10=0$

8) Sa se detemine conjugatul numarului complex:

a) i^{100} b) $-2i$ b) $-1-2i$ b) $3/4+2i$ b) $\sqrt{3}-i$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

c) i^4+i^2+i+1 d) $i^{44}+i^{22}$ e) $(2+i)^4-(2-i)^2$

9.Sa se determine $a\in R$ astfel incit numerele complexe sa aibe modulul 1 :

a) $2-ai$ b) $1-(-a)i$ c) $1/2-(-\sqrt{3}a)i$ d) $-1-(-2+a)i$ e) $1-(1-a)i$

10.Rezolvati in multimea numerelor complexe ecuatiile :

a) $z^3+3=0$ b) $z^5+1=0$ c) $z^6=-1$ d) $1-2z^4=0$ e) $z^9=1$

f) $(1-z)^3+8=0$ g) $z^6-8=0$ h) $-2z^{12}-9=0$

Despre vectori

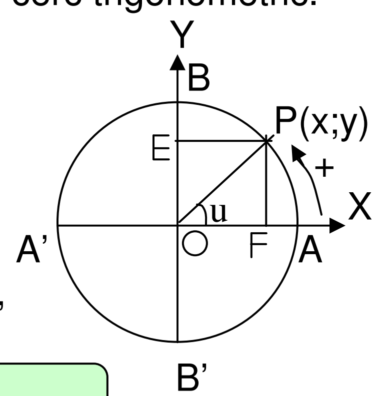
1.Unitati de masura pentru arce si unghiuri

Un arc de un grad este a 360-a parte dintr-un cerc.
Un grad are 60 de minute(1^0=60'), iar un minut are 60 de secunde(1'=6").Masura unghiului la centru(are virful in centrul cercului) este egala cu masura arcului cuprins intre laturi; daca arcul are 1^0 unghiul are 1^0, daca arcul are 25^0, unghiul are 25^0, daca arcul are x^0, unghiul are x^0.
Arcele de cerc se masoara si in radiani : un arc de cerc de un radian are lungimea egala cu raza cercului. Cum lungimea cercului este 2πR, inseamna ca un cerc are 2π radiani, dar si 360^0. Deci, un arc cu masura n^0 are lungimea, in radiani, egala cu l_{arc} = 2πn/360=πn/180, astfel ca la 180^0 avem π radiani, la 90^0 avem π/2 radiani, la 60^0 avem π/3 radiani, etc... Avem urmatorul tabel cu valorile principale :

30^0	45^0	60^0	90^0	135^0	180^0	225^0	270^0	315^0	360^0
π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π

2.Cercul trigonometric

Un cerc pe care stabilim un punct fix de masurare a arcelor, numit originea axelor, si un sens de parcurgere a arcelor, sensul pozitiv este cel contrar acelor de ceasornic, si avind raza egala cu 1, si un sistem de coordinate carteziene XOY, este un cerc trigonometric.
Pe un astfel de cerc arcele au masuri de la 0 la infinit ; in clasele elementare am considerat ca unghiurile si arcele nu pot avea masuri mai mari decit 360^0.
OP=1, E,F=proiectiile lui P pe axe, deci sinu=PF/OP=PF, de aceea spunem ca sinusul se ia pe OY(vertical), iar cosu=OF/OP, deci sinu=OE(=y), iar cosu=OF(=x)



Ex.1: Exprimati in radiani masura arcelor date in grade:
a) 150^0 b) 270^0 c) 250^0 d) 540^0 e) 1024^0 f) 120^0

Sa reamintim definitiile functiilor trigonometrice din gimnaziu:
sinu=(cateta opusa)/(ipotenuza)=PF/OP tgu=sinu/cosu
cosu=(cateta alaturata)/(ipotenuza)=OF/OP ctgu=cosu/sinu
$sin^2u+cos^2u=1$, sinu=cos(90^0-u) , cosu=sin(90^0-u) , tgu ·ctgu=1 , sin30^0=cos60^0=1/2 cos30^0=sin60^0=√3/2 , sin45^0=cos45^0=√2/2, sin0^0= sinπ=sin2π=sin3π=...=0, sinπ/2= sin5π/2= sin9π/2=...=1, sin3π/2= sin7π/2= sin11π/2=...= -1
cos0^0= cos2π=sin4π=sin6π=...=1, sinπ/2= sin3π/2= sin5π/2=...=0, sinπ= sin3π= sin5π=...= -1

u	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π	...	
sinu	1/2	√2/2	√3/2	1	√2/2	0	-√2/2	-1	-√2/2	0	...	dupa 2π valorile se repeta
cosu	√3/2	√2/2	1/2	0	-√2/2	-1	-√2/2	0	√2/2	1	...	dupa 2π valorile se repeta

Tangenta(tg) se calculeaza cu formula tgu=sinu/cosu, iar cotangenta cu formula ctgu=cosu/sinu ...

3.Reducerea la primul cadran

Functia sinus, prescurtat sin, se defineste astfel :

sin : [-π/2; π/2] $\longrightarrow$ [-1; 1], astfel definita ea este bijectiva.

Deoarece functia sin este periodica de 2π, adica dupa ce parcurgem intervalul de valori de la 0 la 2π(un cerc intreg), valorile functiei se repeta, putem defini functia si astfel:

sin : [0; 2π] $\longrightarrow$ [-1; 1], deci functia nu ia valori mai mari decit 1 si nici mai mici decit -1, pentru ca intotdeauna cateta este mai mica decit ipotenuza si sinu=cateta/ipotenuza.

In cadranele I (intre 0 si 90^0) si II (intre 90^0 si 180^0), functia sin este pozitiva, iar in cadranele III (intre 180^0 si 270^0) si IV (intre 270^0 si 360^0) este negativa, deoarece valorile ei se iau pe diametrul vertical, axa OY, iar deasupra lui OX avem valorile pozitive, si sub OX valorile negative.

Avem relatiile : sin(2π+u)=sinu, sin(π-u)=sinu, sin(-u)=-sinu, sin(π+u)=-sinu, daca u este un unghi ascutit, adica in primul cadran.

Reducerea la primul cadran inseamna sa reducem argumentul unei functii trigonometrice la primul cadran, adica un arc de la 0 la 90^0, fara a modifica valoarea functiei.

De exemplu: $\sin 150^0=\sin(180^0-30^0)=\sin 30^0=1/2$,

$\sin 15\pi=\sin(7\cdot 2\pi+\pi)=\sin\pi=0$, $\sin 15\pi/4=\sin(3\pi+3\pi/4)=\sin(\pi+3\pi/4)=-\sin(\pi/4)=-\sqrt{2}/2$, $\sin(2007\cdot\pi/3)=\sin(669\pi)=\sin(668\pi+\pi)=\sin(334\cdot 2\pi+\pi)=\sin(\pi)=0$, etc...

> Ex.2: Reduceti la primul cadran sinusul pentru arcele de :
> a) 350^0 b) 120^0 b) 25π/4

Semnul functiei sin poate fi stabilit astfel :

$\sin(2007\cdot\pi/6)=\sin(334\pi+3\pi/6)=\sin(167\cdot 2\pi+\pi/2)=\sin(\pi/2)=1$,

$\sin 3=\sin(3\cdot 180^0/\pi)$, am transformat 3 radiani in grade cu regula de 3 simpla, adica la π radiani avem 180^0, deci la 3 radiani vom avea x^0 grade, si rezulta $x^0=3\cdot 180^0/\pi$, dar $\pi/2<3\cdot 180^0/\pi<\pi$, deci sin3>0, etc...

> Ex.3: Stabiliti care este semnul functiei sin pentru arcele de :
> a) 350^0 b) 120^0 b) 25π/4   c) sin5   d) sin1   e) sin2

Ecuatia sinx=a, are solutiile $x_k=(-1)^k\arcsin a+k\pi$, unde $k\in\mathbf{Z}$, $a\in$ **[-1; 1]**

> Ex.4: Rezolvati ecuatiile :
> a) sinx=1/2   b) sinx=√2/2   b) sinx=-1/2   c) sinx=-√3/2

Functia cosinus, prescurtat cos, se defineste astfel :
cos : [0; π] $\longrightarrow$ [-1; 1], astfel definita ea este bijectiva.
Deoarece functia cos este periodica de 2π, adica dupa ce parcurgem intervalul de valori de la 0 la 2π(un cerc intreg), valorile functiei se repeta, putem defini functia si astfel:
cos : [0; 2π] $\longrightarrow$ [-1; 1], deci functia nu ia valori mai mari decit 1 si nici mai mici decit -1, pentru ca intotdeauna cateta este mai mica decit ipotenuza si cos=cateta/ipotenuza.
In cadranele I (intre 0 si 90^0) si IV (intre 270^0 si 360^0), functia cos este pozitiva, iar in cadranele II (intre 90^0 si 180^0) si III (intre 180^0 si 270^0) este negativa, deoarece valorile ei se iau pe diametrul orizontal, axa OX, iar in dreapta lui OY avem valorile pozitive, si in stinga lui OY valori negative.

Avem relatiile : cos(2π+u)=cosu, cos(π-u)=-cosu, cos(-u)=cosu, cos(π+u)=-cosu, daca u este un unghi ascutit, adica in primul cadran.
Reducerea la primul cadran inseamna sa reducem argumentul unei functii trigonometrice la primul cadran, adica un arc de la 0 la 90^0, fara a modifica valoarea functiei.
De exemplu: $\cos 150^0=\cos(180^0-30^0)=-\cos 30^0=-\sqrt{3}/2$,
cos15π =sin(7·2π+ π)=cos π =-1, cos15π/4 =cos(2π+ π + π/4) = cos(π+ π/4) =-cos(π/4)=-$\sqrt{2}/2$, cos(2007 ·π/3)=cos(669 π)= cos(668 π+ π)= cos(334 ·2π+ π)= cos(π)=-1, etc...

Ex.2: Reduceti la primul cadran cosinusul pentru arcele de :
a) 350^0 b) 120^0 b) 25π/4

Semnul functiei cos poate fi stabilit astfel :
cos(2007 ·π/6)=cos(334 π+ 3π/6)= cos(167 ·2π+ π/2)= cos(π/2)=0,
cos3=cos($3\cdot 180^0/\pi$), am transformat 3 radiani in grade cu regula de 3 simpla, adica la π radiani avem 180^0, deci la 3 radiani vom avea x^0 grade, si rezulta $x^0=3\cdot 180^0/\pi$, dar $\pi/2<3\cdot 180^0/\pi<\pi$, deci cos3<0, etc...

Ex.3: Stabiliti care este semnul functiei cos pentru arcele de :
a) 350^0 b) 120^0 b) 25π/4 c) cos5 d) cos1 e) cos2

Ecuatia cosx=a, are solutiile $x_k=(-1)^k\arccos a+2k\pi$,unde $k\in\mathbf{Z}$,$a\in$**[-1; 1]**

Ex.4: Rezolvati ecuatiile :
a) cosx=1/2 b) cosx=$\sqrt{2}/2$ b) cosx=-1/2 c) cosx=-$\sqrt{3}/2$

Functia tangenta, prescurtat tg, se defineste astfel :
tg : $(-\pi/2; \pi/2) \longrightarrow (-\infty; +\infty)$, astfel definita ea este bijectiva.
Functia tg este periodica de π, adica dupa ce parcurgem intervalul de valori de la 0 la π, valorile functiei se repeta.
Putem defini functia si astfel tg=cateta opusa/cateta alaturata.
In cadranele I (intre 0 si 90^0) si III (intre 180^0 si 270^0), functia tg este pozitiva, iar in cadranele II (intre 90^0 si 180^0) si IV (intre 270^0 si 360^0) este negativa, deoarece valorile ei se iau pe diametrul vertical, axa Oy, iar deasupra lui Ox avem valorile pozitive, si sub Ox valori negative.

Avem relatiile : $tg(k\pi+u)=tgu$, $tg(k\pi-u)=-tgu$, $tg(-u)=-tgu$, $tg(\pi+u)=tgu$, daca u este un unghi ascutit, adica in primul cadran.
Reducerea la primul cadran inseamna sa reducem argumentul unei functii trigonometrice la primul cadran, adica un arc de la 0 la 90^0, fara a modifica valoarea functiei.
De exemplu: $tg150^0=tg(180^0-30^0)=-tg30^0=-\sqrt{3}/3$,
$tg15\pi=0$, $tg15\pi/4=tg(3\pi+3\pi/4)=$
$tg(3\pi/4)=-tg(\pi/4)=-1$, $tg(2007\cdot\pi/3)=tg(669\pi)=0$

Ex.2: Reduceti la primul cadran tangenta pentru arcele de :
a) 350^0 b) 120^0 b) $25\pi/4$

Semnul functiei tg poate fi stabilit astfel :
$tg(2007\cdot\pi/6)=tg(334\pi+3\pi/6)=tg(3\pi/6)=tg(\pi/2)\longrightarrow+\infty$,
$tg3=tg(3\cdot180^0/\pi)$, am transformat 3 radiani in grade cu regula de 3 simpla, adica la π radiani avem 180^0, deci la 3 radiani vom avea x^0 grade, si rezulta $x^0=3\cdot180^0/\pi$, dar $\pi/2<3\cdot180^0/\pi<\pi$, deci $tg3<0$, etc...

Ex.3: Stabiliti care este semnul functiei tg pentru arcele de :
a) 350^0 b) 120^0 b) $25\pi/4$ c) sin5 d) sin1 e) sin2

Ecuatia tgx=a, are solutiile $x_k=arctgx+k\pi$, unde $k\in N$, $a\in \mathbf{R}$

Ex.4: Rezolvati ecuatiile :
a) $tgx=1/2$ b) $tgx=\sqrt{2}/2$ b) $tgx=-1/2$ c) $tgx=-\sqrt{3}/2$

Functia cotangenta, prescurtat ctg, se defineste astfel :
ctg : $(0; \pi) \longrightarrow R$, astfel definita ea este bijectiva.
Functia ctg este periodica de π, adica dupa ce parcurgem intervalul de valori de la 0 la π valorile se repeta.
ctg=cateta alaturata/cateta opusa.
In cadranele I (intre 0 si 90^0) si III (intre 180^0 si 270^0), functia ctg este pozitiva, iar in cadranele II (intre 90^0 si 180^0) si IV (intre 270^0 si 360^0) este negativa, deoarece valorile ei se iau pe diametrul orizontal, axa OX, iar in dreapta lui OY avem valorile pozitive, si in stinga lui OY valori negative.

Avem relatiile : ctg(kπ+u)=ctgu, ctg(kπ-u)=-ctgu, ctg(-u)=-ctgu, ctg(π+u)=ctgu, daca u este un unghi ascutit, adica in primul cadran.
Reducerea la primul cadran inseamna sa reducem argumentul unei functii trigonometrice la primul cadran, adica un arc de la 0 la 90^0, fara a modifica valoarea functiei.
De exemplu: $ctg150^0=ctg(180^0-30^0)=-ctg30^0=-\sqrt{3}$,
$ctg15\pi = ctg(14\pi+\pi)=ctg\,\pi \longrightarrow -\infty$, $ctg15\pi/4 = ctg(3\pi + 3\pi/4) = ctg(\pi-\pi/4) = -ctg(\pi/4)=-1$, $ctg(2007 \cdot \pi/3)=ctg(669\,\pi)=ctg\,\pi \longrightarrow -\infty$

Ex.2: Reduceti la primul cadran ctg pentru arcele de :
a) 350^0 b) 120^0 b) $25\pi/4$

Semnul functiei ctg poate fi stabilit astfel :
$ctg(2007 \cdot \pi/6)=ctg(334\,\pi+ 3\pi/6)= ctg(3\pi/6)= ctg(\pi/2)=0$,
$ctg3=ctg(3\cdot 180^0/\pi)$, am transformat 3 radiani in grade cu regula de 3 simpla, adica la π radiani avem 180^0, deci la 3 radiani vom avea x^0 grade, si rezulta $x^0=3\cdot 180^0/\pi$, dar $\pi/2 < 3\cdot 180^0/\pi < \pi$, deci ctg3<0, etc...

Ex.3: Stabiliti care este semnul functiei ctg pentru arcele de :
a) 350^0 b) 120^0 b) $25\pi/4$ c) sin5 d) sin1 e) sin2

Ecuatia ctgx=a, are solutiile $x_k=arcctgx+k\pi$, unde $k\in N$, $a\in \mathbf{R}$

Ex.4: Rezolvati ecuatiile :
a) ctgx=1/2 b) $ctgx=\sqrt{2}/2$ b) ctgx=-1/2 c) $ctgx=-\sqrt{3}/2$

5.Calcul vectorial

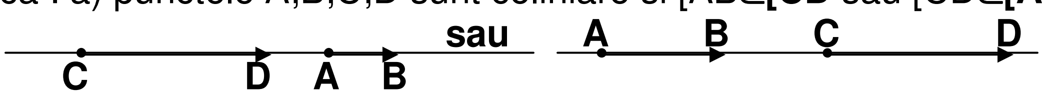
Definitie: Orice pereche ordonata de puncte din plan (A;B) determina un segment orientat cu originea in A si extremitatea in B si notat $\overrightarrow{AB}$.
Un segment orientat este caracterizat de lungime, directie si sens.
Dreapta AB este dreapta suport a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

Doua puncte distincte din plan, A si B determina doua segmente orientate (A;B) si (B;A), adica $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{BA}$.

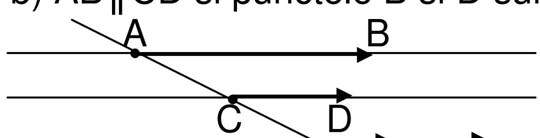
Lungimea segmentului [AB] se numeste lungimea/norma/modulul segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ si se noteaza $|\overrightarrow{AB}|$, directia seg.orientat este dreapta AB, sensul este cel de la A la B.

Segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ au aceeasi directie daca AB $\parallel$ CD sau dreptele suport coincid.

Segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ cu aceeasi directie au acelasi sens daca : a) punctele A;B;C;D sunt coliniare si [AB$\subset$**[CD** sau [CD$\subset$**[AB,**



sau b) AB $\parallel$ CD si punctele B si D sunt de aceeasi parte a dreptei AC.



Segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolente daca au:

1. aceeasi directie
2. acelasi sens
3. aceeasi lungime

si scriem aceasta $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Relatia de echipolenta are urmatoarele proprietati:

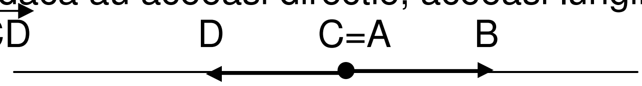
1. este reflexiva : AB~AB
2. este tranzitiva: AB~CD si CD~EF rezulta AB~EF
3. este simetrica: AB~CD rezulta CD~AB, si reciproc

O relatie care este reflexiva, simetrica si tranzitiva se numeste relatie de echivalenta.

<u>Vectorul</u> $\vec{v}$, reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$, <u>este multimea</u> tuturor segmentelor orientate echipolente cu $\overrightarrow{AB}$. Orice segment orientat din aceasta multime este un <u>reprezentant</u> al vectorului $\vec{v}$.

Doi vectori sunt egali daca multimile care-i reprezinta sunt egale.

Doi vectori sunt opusi daca au aceeasi directie, aceeasi lungime si sensuri opuse. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$

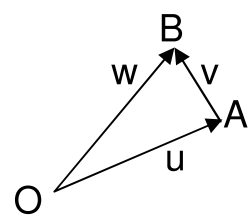


Doi vectori sunt coliniari daca au aceeasi directie. $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari daca $AB \parallel CD$ sau $AB=CD$(cele 2 drepte suport coincid).

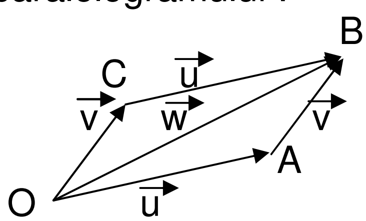
Spunem ca $\vec{w}$ este suma dintre vectorii $\vec{u}$ si $\vec{v}$, notata $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, daca exista doua segmente orientate $\overrightarrow{OA}$ si $\overrightarrow{AB}$ reprezentanti ai vectorilor $\vec{u}$ si $\vec{v}$ astfel incit $\overrightarrow{OB}$ sa fie un reprezentant al lui $\vec{w}$.

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$

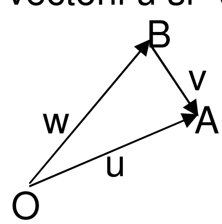
Aceasta este regula triunghiului de adunare a doi vectori :



Regula paralelogramului :



Spunem ca $\vec{w}$ este diferenta dintre vectorii $\vec{u}$ si $\vec{v}$, notata $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, daca $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$



Doi vectori u si v sunt coliniari (au aceeasi directie) daca exista r numar real astfel incit $\vec{u} = r \cdot \vec{v}$.

Oricarui vector $\vec{u}$ de lungime $|\vec{u}|>0$ ii putem asocia vectorul $(1/|\vec{u}|)\vec{u}$, avind aceeasi directie si acelasi sens cu $\vec{u}$, dar avind lungimea 1. Fie $\vec{i}=(1/|\vec{u}|)\vec{u}$, avem deci $\vec{u}=|\vec{u}| \cdot \vec{i}$, $\vec{i}$ se numeste versor sau vector unitate al vectorului $\vec{u}$, iar daca notam $r=|\vec{u}|$, atunci $\vec{u} = r \cdot \vec{i}$.

Punctele A,B si C sunt coliniare, daca si numai daca vectorii $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, sau daca si numai daca exista un numar r, real, astfel incit $\overrightarrow{AC}=r\cdot\overrightarrow{AB}$.

Vectorul nenul $\vec{u}$ este un vector director al dreptei d, daca $\vec{u}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{AB}$ definit de doua puncte A si B ale dreptei d.

Doi vectori $\vec{u}$ si $\vec{v}$ ai aceleeasi drepte sunt coliniari.

Doua drepte d si d' avind vectorii directori $\vec{u}$ si $\vec{v}$, sunt paralele daca si numai daca $\vec{u}$ si $\vec{v}$ sunt coliniari.

Punctul M este mijlocul segmentului [AB] daca si numai daca pentru orice punct P din plan avem $\overrightarrow{PM}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})/2$.

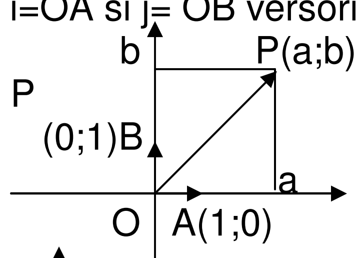
Segmentul [MN] este linie mijlocie in triunghiul ΔABC, $M\in AB$, $N\in AC$ daca si numai daca, $\overrightarrow{BC}=2\cdot\overrightarrow{MN}$.

Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, daca si numai daca, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$. Sau, daca si numai daca, pentru orice punct P din plan avem $\overrightarrow{PG}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})/3$.

Fie XOY un reper cartezian si punctele $A(1;0)\in Ox$, $B(0;1)\in Oy$ si P(a;b) un punct din plan. Vectorul definit de segmentul orientat $\overrightarrow{OP}$ il vom numi vectorul de pozitie al punctului P, iar $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$ si $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$ versorii axelor de coordonate.

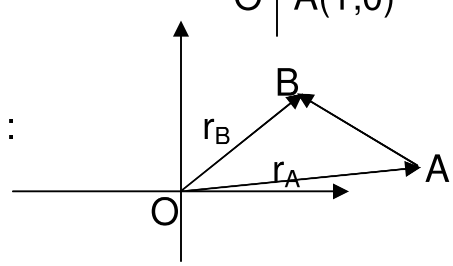
Notatie: $\vec{r}_P$ =este vectorul de pozitie al punctului P

$\vec{i}=\vec{r}_A$, $\vec{j}=\vec{r}_B$



Daca AB este un vector din plan, atunci :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B - \vec{r}_A$



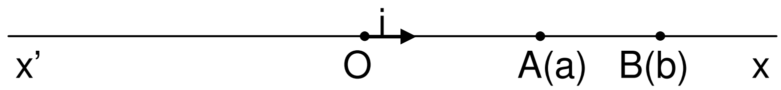
Daca M de pe [AB] imparte segmentul [AB] in raportul k, adica $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$, $k\in$ **R-{-1}, atunci $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB})/(1+k)$, unde O este un punct oarecare din plan.**

Daca k=1, atunci M este mijlocul lui [AB].

3.Geometrie analitica

1.Axa

Axa (x'x; O; $\vec{i}$) este o dreapta pe care am fixat punctul O, numit originea axei, o unitatea de masura si sensul pozitiv al axei date de vectorul unitate $\vec{i}$, numit versor. Cuplul (O; $\vec{i}$) se numeste reper pe dreapta x'x.

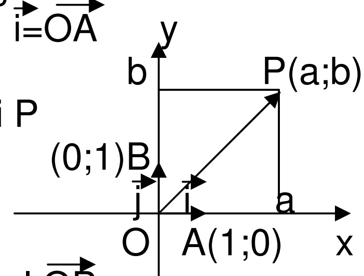


Punctul A(a) este la dreapta lui O daca a>0, sau la stinga lui O daca a<0 si A=O daca a=0, numarul real a se numeste abscisa.
Distanta dintre doua puncte A(a) si B(b) pe o axa este lungimea segmentului AB=Ib-aI.

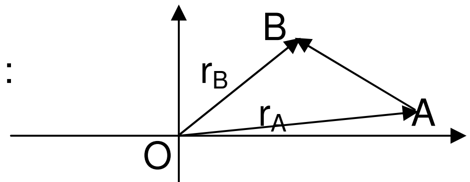
2.Reper cartezian in plan

Un reper cartezian in plan este format din doua axe (x'x; O; $\vec{i}$) si (y'y; O; $\vec{j}$), unde dreptele x'x si y'y sa fie perpendiculare, iar $\vec{i}$ si $\vec{j}$ sunt versorii(vectorii unitate) axelor.

Fie XOY un reper cartezian si punctele A(1;0) $\in$Ox, B(0;1) $\in$Oy si P(a;b) un punct din plan. Vectorul definit de segmentul orientat $\overrightarrow{OP}$ il vom numi vectorul de pozitie al punctului P, iar $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$ si $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$ versorii axelor de coordonate.



Notatie: $\vec{r}_P$ =este vectorul de pozitie al punctului P
$\vec{i}=\vec{r}_A$, $\vec{j}=\vec{r}_B$, $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}$ =(a; b)
Modulul vectorului I $\vec{r}_P$ I= OP=$\sqrt{a^2+b^2}$
(adica Tr.Pitagora in ΔPOA)
Orice vector care are aceeasi directie cu vectorul $\overrightarrow{OP}$ se numeste vector director al dreptei OP; daca $\vec{v}$ este un vector director al dreptei OP atunci si r · $\vec{v}$ este un vector director al lui OP.
In plan, pe reperul cartezian ortonormat xOy, un vectorul $\overrightarrow{AB} \in \vec{v}$ are reprezentarea $\overrightarrow{AB}=l\cdot \vec{i}+m\cdot \vec{j}$, iar l; m se numesc parametrii directori ai dreptei(ei dau directia dreptei) si definesc vectorul $\vec{v}$=(l;m).
O dreapta din plan este bine determinata daca se cunosc parametrii ei directori l; m sau unghiurile (α; β) pe care dreapta le face cu axele de coordonate Ox respectiv Oy, deci cos α=l/I$\overrightarrow{AB}$I; cosβ=m/I$\overrightarrow{AB}$I, iar versorul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $\overrightarrow{AB}$/I$\overrightarrow{AB}$I=$\vec{i}\cdot$ cos α+$\vec{j}\cdot$ cosβ
Avem si $\cos^2\alpha+\cos^2\beta =1$



Daca $\overrightarrow{AB}$ este un vector din plan, atunci :
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, deci $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B - \vec{r}_A$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
Daca $M_1(x_1; y_1)$ si $M_2(x_2; y_2)$ atunci
$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ este distanta dintre doua puncte $M_1(x_1; y_1)$ si $M_2(x_2; y_2)$ din plan, sau modulul vectorului $\overrightarrow{M_1M_2}$, sau lungimea segmentului $[M_1M_2]$.

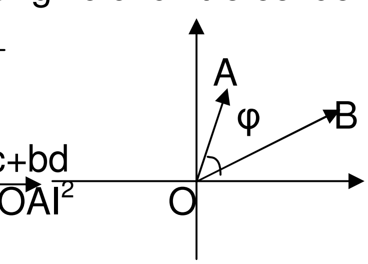
1.Doi vectori $\vec{v}_1=(a;b)$ si $\vec{v}_2=(c;d)$ sunt egali daca $a=c$ si $b=d$.

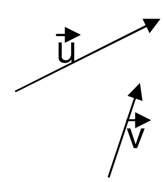
2.Suma a doi vectori $\vec{v}_1=(a;b)$ si $\vec{v}_2=(c;d)$ este vectorul $\vec{s}=(a+c;b+d)$

3.Inmultirea vectorului $\vec{v}=(a;b)$ cu un numar real r, numit scalar, iar operatia inmultirea cu scalari, este vectorul $\vec{p}=r\cdot\vec{v}=(ra; rb)$

4.Doi vectori nenuli $\vec{u}$ si $\vec{v}$ sunt coliniari daca si numai daca exista un numar real r , nenul astfel incit $\vec{u}= r\cdot\vec{v}$.
Rezulta ca trei puncte A,B,C sunt coliniare daca si numai daca exista un numar real r , nenul astfel incit $\overrightarrow{AB}= r\cdot\overrightarrow{AC}$, adica vectorii $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.
Relatia $\vec{u}= r\cdot\vec{v}$ ne arata ca vectorii $\vec{u}$ si $\vec{v}$ au aceeasi directie, dar nu neaparat si acelasi sens : daca $r>0$ atunci vectorii $\vec{u}$ si $\vec{v}$ au acelasi sens, daca $r<0$ atunci $\vec{u}$ si $\vec{v}$ au sensuri opuse.
Doi vectori nenuli $\vec{u}$ si $\vec{v}$ sunt necoliniari daca si numai daca o egalitate de forma $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=0$, cu α,β numere reale, implica $\alpha=\beta=0$.
Dreptele AB si CD sunt paralele daca vectorii $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari.

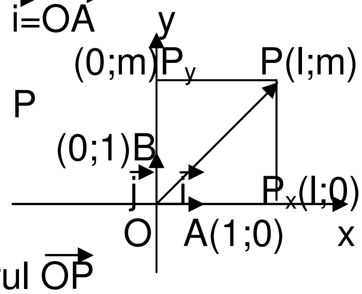
5.Produsul scalar a doi vectori $\vec{u}$ si $\vec{v}$ este egal cu produsul dintre modulele lor si cosinusul unghiului dintre cei doi vectori, adica :
Fie A(a; b) si B(c; d)
$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$ $\quad |\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$
Fie $\overrightarrow{OA}= \vec{u}$ si $\overrightarrow{OB}= \vec{v}$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\varphi=ac+bd$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}= |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA}|\cos 0^0=|\overrightarrow{OA}|^2$
$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}$
Deci $|\overrightarrow{OA}|^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=a^2+b^2$;
$\cos\varphi=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})/(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)=(ac+bd)/(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2})$





Doi vectori $\vec{u}$ si $\vec{v}$ sunt perpendiculari daca unghiul dintre ei este de 90^0, adica $\varphi=\pi/2$, rezulta $\cos \pi/2=0$ si deci $\vec{u}\cdot\vec{v}=ac+bd=0$

Fie XOY un reper cartezian si punctele A(1;0) $\in$Ox, B(0;1) $\in$Oy si P(l;m) un punct din plan. Vectorul definit de segmentul orientat $\overrightarrow{OP}$ il vom numi vectorul de pozitie al punctului P, iar $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$ si $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$ versorii axelor de coordonate.



Notatie: $\vec{r}_P$ =este vectorul de pozitie al punctului P

$\vec{i}=\vec{r}_A$, $\vec{j}=\vec{r}_B$, $\vec{r}_P=\overrightarrow{OP}=l\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}$ =(a; b)

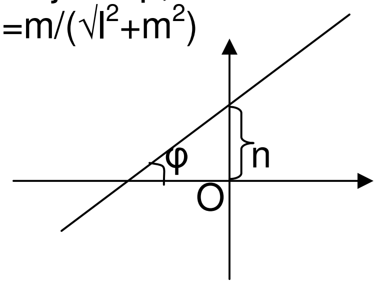
Modulul vectorului $|\vec{r}_P|= OP=\sqrt{l^2+m^2}$

$\vec{i}^2=1$, $\vec{j}^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$

Orice vector care are aceeasi directie cu vectorul $\overrightarrow{OP}$ se numeste vector director al dreptei OP.

Daca $\vec{v}$ =(l;m) este un vector definit de parametrii l si m, l,m$\in$R in plan, pe reperul cartezian ortonormat xOy, un vector $\overrightarrow{AB}\in\vec{v}$ are reprezentarea $\overrightarrow{AB}=l\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}$, iar l; m se numesc parametrii directori ai dreptei(ei dau directia dreptei).

O dreapta din plan este bine determinata daca se cunosc parametrii ei directori l; m sau unghiurile (α; β) pe care dreapta le face cu axele de coordonate Ox respectiv Oy, deci cos α=l/IABI; cosβ=m/IABI, iar versorul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $\overrightarrow{AB}/|AB|=\vec{i}\cdot\cos\alpha+\vec{j}\cdot\cos\beta$, rezulta si $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$, iar $\cos\alpha=l/(\sqrt{l^2+m^2})$ $\cos\beta=m/(\sqrt{l^2+m^2})$



6.Ecuatia dreptei in plan

Ecuatia explicita : y=mx+n, unde m=panta dreptei, iar n=ordonata la origine si m=tgφ, unde φ=unghiul dintre dreapta si axa Ox.

Ecuatia dreptei care trece prin punctul $P(x_0; y_0)$ si de panta m este : $y-y_0=m(x-x_0)$.

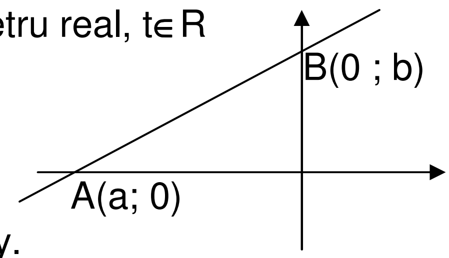
Daca directia dreptei este data de vectorul director $\vec{v}$=(l ;m) atunci ecuatia devine: $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m$

Ecuatia dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1; y_1)$ si $M_2(x_2 ; y_2)$ este $y-y_1=m(x-x_1)$, unde panta $m=(y_2-y_2)/(x_2-x_1)$, deci avem si forma : $(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)$ sau sub forma de determinant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Punctul $M_3(x_3 ; y_3)$ este pe dreapta M_1M_2, adica punctele M_1; M_2; M_3 sunt coliniare daca
$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =0$$

Ecuatiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul M_0 (x_0 ; y_0) si a carei directie este data de vectorul director $\vec{d}=(d_1 ; d_2)$ sunt : $x=x_0+td_1$ si $y=y_0+td_2$, unde t este un parametru real, $t\in R$



Ecuatia dreptei prin taieturi, data de punctele unde dreapta intersecteaza axele de coordonate:
$x/a+y/b-1=0$, unde $A(a; 0) \in Ox$, $B(0 ; b) \in Oy$.

Ecuatia generala a dreptei este : $ax+by+c=0$, unde $a,b,c\in R$

<u>Cazuri partuculare :</u>
Dreapta paralela cu Ox : $y=n$
Dreapta paralela cu Oy : $x=a$
Prima bisectoare a axelor : $y=x$
A doua bisectoare a axelor : $y=-x$

Punctul $M(x_0; y_0)$ apartine dreptei de ecuatie $ax+by+c=0$ daca coordonatele sale verifica ecuatia dreptei, adica $ax_0+by_0+c=0$

Punctul de intersectie a doua drepte date de ecuatiile generale $a_1x+b_1y+c_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2=0$ are coordonatele date de solutiile sistemului (x_0 ; y_0).
Sistemul are solutie unica daca determinantul sau $\Delta= a_1b_2-a_2b_1\neq0$, adica dreptele sunt concurente, sistemul nu are solutii, adica dreptele sunt paralele daca determinantul sistemului $\Delta=0$, sau
sistemul are o infinitate de solutii, adica dreptele sunt identice daca determinantul sistemului $\Delta=0$ si $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$.

Doua drepte sunt paralele daca sistemul de mai sus are determinantul (Δ)egal cu 0, adica $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$,
ceea ce inseamna $a_1b_2-a_2b_1=0$ sau
$b_1/a_1=b_2/a_2$ sau chiar $m_1=m_2$, adica au pantele egale.
Daca $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$ atunci dreptele coincid, sunt confundate.

Unghiul a doua drepte= φ, care au pantele m_1, respectiv m_2, este dat de formula : $\operatorname{tg} \varphi=|(m_1-m_2)/(1+m_1m_2)|$
Daca $m_1m_2=-1$ atunci dreptele sunt perpendiculare, adica $\varphi=90^0$.

Distanta de la un punct $P(x_0; y_0)$ la o dreapta (d) : $y=mx+n$ este $d=(|y_0-mx_0-n|)/(\sqrt{1+m^2})=(|ax_0+by_0+c|)/(\sqrt{a^2+b^2})$

Aria triunghiului determinat de punctele $A(x_1;y_1)$;$B(x_2;y_2)$;$C(x_3;y_3)$

$$S_{ABC}=(1/2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Daca $M(x_1 ; y_1)$ de pe [AB] imparte segmentul [AB] in raportul k, adica $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$, $k\in$ **R-{-1}, atunci $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB})/(1+k)$, unde O este un punct oarecare din plan. Daca A**$(a_1 ; b_1)$ $B(a_2 ; b_2)$, atunci M are coordonatele $x_1=(a_1+k\,a_2)/(1+k)$ si $y_1=(b_1+k\,b_2)/(1+k)$.

Daca k=1, atunci M este mijlocul lui [AB] si M are coordonatele $x_1=(a_1+a_2)/2$ si $y_1=(b_1+b_2)/2$.

1. Distanta dintre doua puncte A(a) si B(b) pe o axa este lungimea segmentului AB=|b-a|.

2. $v=a\cdot i+b\cdot j$, i si j sunt versorii(vectorii unitate), a si b parametrii directori, un reprezentant al vectorului poate fi seg.OP, iar P(a;b)
$i^2=1$, $j^2=1$, $i\cdot j=j\cdot i=0$, modulul lui v, este $|v|=\sqrt{a^2+b^2}$

3.Produsul scalar a doi vectori: daca $u=a\cdot i+b\cdot j$ si $v=c\cdot i+d\cdot j$, atunci $u\cdot v=|u||v|\cos\varphi=ac+bd$, unde φ este unghiul dintre directiile vectorilor, deci $\cos\varphi=(ac+bd)/(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2})$

4.Vectorii u = v daca a=c si b=d

5.$u+v=(a+c)i+(b+d)j$, $u-v=(a-c)i+(b-d)j$, $r\cdot u=ra\cdot i+rb\cdot j$

6.Vectorii sunt coliniari daca $u=r\cdot v$, unde $r\in R$

7.Vectorii sunt perpendiculari daca $uv=ac+bd=0$

8.Ecuatia dreptei in plan:

a) Ecuatia generala a dreptei este : $ax+by+c=0$, unde $a,b,c\in R$

b) Ecuatia explicita : $y=mx+n$, unde m=panta, n=ordonata la origine

c) Ecuatia dreptei care trece prin punctul $P(x_0; y_0)$ si de panta m este : $y-y_0=m(x-x_0)$.

d) Ecuatia dreptei care trece prin punctul $P(x_0; y_0)$ si are directia vectorului $v=(l ;m)=l\cdot i+m\cdot j$: $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m$

e)Ecuatia dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1; y_1)$ si $M_2(x_2 ; y_2)$ este $y-y_1=m(x-x_1)$, unde panta $m=(y_2-y_2)/(x_2-x_1)$, deci avem si forma : $(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)$ sau sub forma de determinant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

f) Punctul $M_3(x_3 ; y_3)$ este pe dreapta M_1M_2, adica punctele M_1; M_2; M_3 sunt coliniare daca :

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

g) Ecuatia dreptei prin taieturi: $x/a+y/b-1=0$, unde $A(a;0)\in Ox$, $B(0;b)\in Oy$

h)Dreptele $a_1x+b_1y+c_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2=0$ sunt paralele daca: $a_1/b_1=a_2/b_2$ **coincid daca** $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$,si sunt perpendiculare daca $(a_1a_2)/(b_1b_2)=-1$

i) Distanta de la $P(x_0; y_0)$ la dreapta (d) : $ax+by+c=0$ este $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

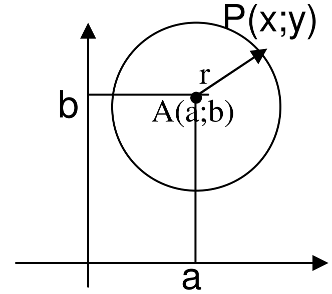
j) Aria triunghiului determinat de punctele $A(x_1;y_1)$;$B(x_2;y_2)$;$C(x_3;y_3)$

$$S_{ABC}=(1/2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

k) **Daca A**$(a_1 ; b_1)$ $B(a_2 ; b_2)$, si AM/MB=k, atunci M are coordonatele $x_1=(a_1+k\,a_2)/(1+k)$ si $y_1=(b_1+k\,b_2)/(1+k)$, daca k=1, M=mijlocul[AB], deci $x_1=(a_1+ a_2)/2$ si $y_1=(b_1+ b_2)/2$

1.Cercul

Cercul C(A ; r), de centru A(a;b) si raza r este locul geometric la punctelor P(x;y) din plan cu proprietatea ca AP=r.



Ecuatia cercului este: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Punctelor $M(x_0;y_0)$ apartine cercului/este pe cerc daca coordonatele sale verifica ecuatia cercului, adica daca inlocuind pe x cu x_0 si pe y cu y_0 obtinem $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2=0$.

O alta forma pentru ecuatia cercului este:

$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, unde A=-a, B=-b si $A^2+B^2-C=r^2>0$

Ecuatia cercului care trece prin 3 puncte necoliniare $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ este :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =0$$

Punctul $M_4(x_4 ;y_4)$ este pe acest cerc daca

$$\begin{vmatrix} x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =0$$

Ecuatia cercului care trece prin O(0;0) este: $x^2+y^2=r^2$

Ecuatia cercului cu centrul C(a;0) pe Ox este: $(x-a)^2+y^2=r^2$

Ecuatia cercului cu centrul C(0;b) pe Oy este: $x^2+(y-b)^2=r^2$

Distanta de la $M(x_0;y_0)$ la centrul cercului C(a;b), este $d=MC=d^2-r^2=(x_0-a)^2-(y_0-b)^2-r^2$ si se numeste puterea lui M in raport cu cercul.

Axa radicala a doua cercuri este locul geometric al punctelor care au aceeasi putere fata de cele doua cercuri.

Daca cercurile au ecuatiile : $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ si $x^2+y^2+2A'x+2B'y+C'=0$ atunci ecuatia axei radicale se obtine prin scaderea ecuatiilor celor doua cercuri, adica:

$2(A-A')x+2(B-B')y+C-C'=0$

Axa radicala este perpendiculara pe linia centrelor cercurilor.

Ecuatia tangentei la cercul $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ in punctul $P(x_0;y_0)$ este : $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+C=0$

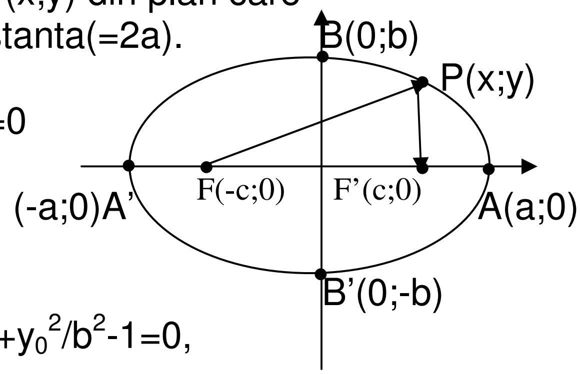
1.Elipsa

Elipsa $E(F_1;F_2;2c;2a)$, cu focarele F(-c;0) si F'(c;0), iar A(a;0), A'(-a;0) B(0;b) si B'(0;-b), punctele de intersectie cu axele, unde $a^2-c^2=b^2$,, este locul geometric la punctelor P(x;y) din plan care au suma distantelor la focare constanta(=2a).

Distanta focala FF'=2c.

Ecuatia elipsei este: $x^2/a^2+y^2/b^2-1=0$

Punctul $M(x_0;y_0)$ apartine elipse/ este pe elipsa daca coordonatele sale verifica ecuatia elipsei, adica daca inlocuind pe x cu x_0 si pe y cu y_0 obtinem $x_0^2/a^2+y_0^2/b^2-1=0$, adica o relatie adevarata.



Tangenta la elipsa in punctul $M_0(x_0;y_0)$ are ecuatia(se obtine prin dedublare), adica: $xx_0/a^2+yy_0/b^2-1=0$ cu conditia ca $x_0^2/a^2+y_0^2/b^2-1=0$

Aria elipsei este $A=\pi ab$.

1.Hiperbola

Hiperbola $H(F_1;F_2;2c;2a)$, cu focarele F(-c;0) si F'(c;0), iar A(a;0) si A'(-a;0), punctele de intersectie cu axele, unde $c^2-a^2=b^2$,, este locul geometric la punctelor P(x;y) din plan care au diferenta distantelor la focare constanta(=2a).

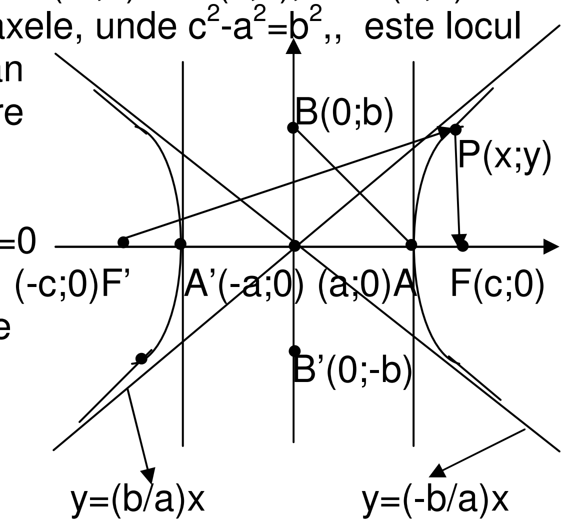
Distanta focala FF'=2c.

Ecuatia hiperbolei este:$x^2/a^2-y^2/b^2-1=0$

Punctul $M(x_0;y_0)$ apartine sau este pe hiperbola daca coordonatele sale verifica ecuatia hiperbolei, adica daca inlocuind pe x cu x_0 si pe y cu y_0 obtinem

$x_0^2/a^2-y_0^2/b^2-1=0$,

adica o relatie adevarata.



Tangenta la hiperbola in punctul $M_0(x_0;y_0)$ are ecuatia se obtine prin dedublare, adica: $xx_0/a^2-yy_0/b^2-1=0$ cu conditia ca $x_0^2/a^2-y_0^2/b^2-1=0$

Cazuri particulare:

1.Ecuatia hiperbolei echilatere rapoartata la axele sale se obtine daca facem b=a : $x^2-y^2-a^2=0$, care are ca asimptote dreptele $y=\pm x$

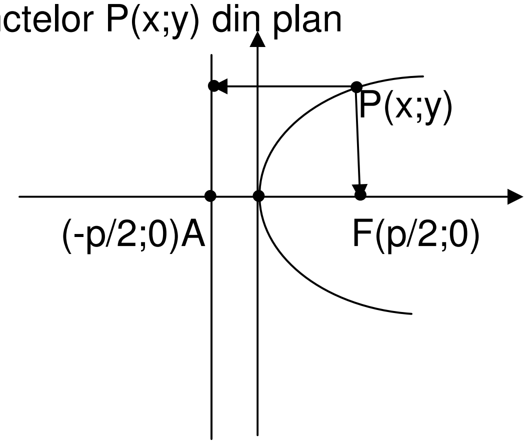
2.Ecuatia hiperbolei echilatere rapoartata la asimtotele sale se obtine daca facem $c=a\sqrt{2}$, $m=a/\sqrt{2}$: $xy=m^2$, sau $xy=-m^2$cu asimptote chiar axele de coordonate.

3.Ecuatia hiperbolei conjugate rapoartata la asimtotele sale, dar cu axa Oy jucind rolul lui Ox, este $x^2/a^2-y^2/b^2+1=0$

4.Ecuatiile parametrice ale hiperbolei rapoartata la asimtotele sale, se obtine din $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, $(x/a+y/b)(x/a-y/b)=1$, notam cu $t= x/a+y/b$, deci $1/t=x/a-y/b$ si obtinem ecuatiile $x=a/2(t+1/t)$, $y=b/2(t-1/t)$

1.Parabola

Parabola P(F;d;p/2), cu focarul F(p/2;0) si directoarea x=-p/2, iar A(-p/2;0) , este locul geometric la punctelor P(x;y) din plan egal departate de focar si directoare.

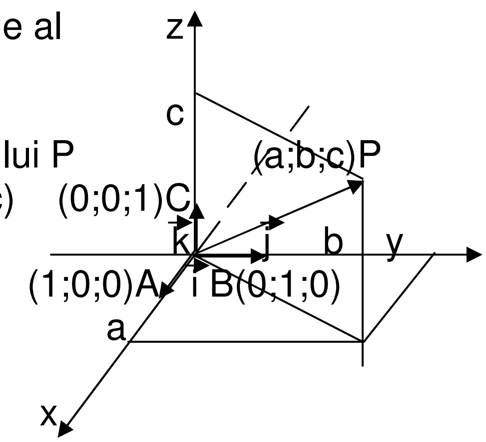


Ecuatia parabolei este: $y^2=2px$
Punctul $M(x_0;y_0)$ apartine sau este pe parabola daca coordonatele sale verifica ecuatia parabolei, adica daca inlocuind pe x cu x_0 si pe y cu y_0 obtinem
$y_0^2= 2px_0$,
adica o relatie adevarata.
Tangenta la hiperbola in punctul $M_0(x_0;y_0)$ are ecuatia se obtine prin dedublare, adica: $yy_0=p(x+x_0)$

Cazuri particulare:

2.Reper cartezian in spatiu

Un reper cartezian in spatiu este format din trei axe ($x'x$; O; $\vec{i}$) si ($y'y$; O; $\vec{j}$) si ($z'z$; O; $\vec{k}$) unde dreptele $x'x$, $y'y$ si $z'z$ sa fie perpendiculare, iar $\vec{i}$, $\vec{j}$ si $\vec{k}$ sunt versorii(vectorii unitate) axelor.
Fie Oxyz un reper cartezian si punctele $A(1;0;0) \in Ox$, $B(0;1;0) \in Oy$, $C(0;0;1) \in Oy$ si $P(a;b;c)$ un punct din spatiu. Vectorul definit de segmentul orientat $\overrightarrow{OP}$ este vectorul de pozitie al punctului P, iar $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$ versorii axelor de coordonate.



Notatie: $\vec{r}_P$ =este vectorul de pozitie al punctului P
$\vec{i}=\vec{r}_A$, $\vec{j}=\vec{r}_B$, $\vec{k}=\vec{r}_C$, $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k} =(a;b;c)$
Modulul vectorului $|\vec{r}_P|= OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Orice vector care are aceeasi directie cu vectorul $\overrightarrow{OP}$ se numeste vector director al dreptei OP; daca $\vec{v}$ este un vector director al dreptei OP atunci si $r \cdot \vec{v}$ este un vector director.
In spatiu, pe reperul cartezian ortonormat Oxyz, vectorul $\overrightarrow{AB} \in \vec{v}$ are reprezentarea $\overrightarrow{AB}=l\cdot \vec{i}+m\cdot \vec{j}+n\cdot \vec{k}$, iar l; m; n se numesc parametrii directori ai dreptei(ei dau directia dreptei); $\vec{v}=(l;m;n)$.
O dreapta din spatiu este bine determinata daca se cunosc parametrii ei directori l; m; n sau unghiurile (α; β; γ) pe care dreapta le face cu axele de coordonate Ox; Oy respectiv Oz, deci $\cos\alpha=l/|AB|$; $\cos\beta=m/|AB|$; $\cos\gamma=n/|AB|$, iar versorul vectorului AB este $\overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|=\vec{i}\cdot \cos\alpha+\vec{j}\cdot \cos\beta+\vec{k}\cdot \cos\gamma$ Avem si $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma =1$, iar $\cos\alpha$; $\cos\beta$;$\cos\gamma$ se numesc cosinusurile directoare ale dreptei.
Daca $\vec{u}=(x_1 ;y_1 ;z_1)$ si $\vec{v} =(x_2 ;y_2 ;z_2)$ atunci produsul scalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ Vectorii sunt perpendiculari daca $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
Daca $\varphi=\sphericalangle(\vec{u} ;\vec{v})$ atunci $\cos\varphi=(\vec{u} \cdot\vec{v})/(|\vec{u}||\vec{v}|)$
$\cos\varphi=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)/(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2})$

Daca $M_1(x_1; y_1 ;z_1)$ si $M_2(x_2; y_2 ;z_2)$ atunci
$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2- x_1)^2+(y_2- y_1)^2 +(z_2- z_1)^2}$ este distanta dintre doua puncte din spatiu, sau modulul vectorului $\overrightarrow{M_1M_2}$, sau lungimea segmentului $[M_1M_2]$.
Daca M imparte segmentul in raportul $k=M_1M/MM_2>0$ atunci M are coordonatele $x_M=(x_1+kx_2)/(1+k)$, $y_M=(y_1+ky_2)/(1+k)$, $z_M=(z_1+kz_2)/(1+k)$

Punctele O,A,B,C sunt coplanare daca vectorii $\overrightarrow{OA}$ si $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari si exista numerele reale α si β astfel incit $\overrightarrow{OC}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$.
Vectorii necoliniari si nenuli $\vec{u}$ si $\vec{v}$ ale caror directii sunt paralele cu un plan se numesc vectorii directori ai planului, deci orice vector $\vec{w}$ din plan are o ecuatie de forma $\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$, unde $\alpha; \beta\in R$.
Un vector nenul $\vec{n}$ se numeste vector normal la un plan daca un reprezentant al sau are dreapta suport perpendiculara pe plan.
Ecuatia vectoriala a planului care trece prin punctul M_0 si care este perpendicular pe $\vec{n}$ este $(\vec{r} - \vec{r}_0)\ \vec{n}=0$, unde $\vec{r}$ este vectorul de pozitie al unui punct curent al planului, iar $\vec{r}_0$ este vectorul de pozitie al punctului M_0.
Ecuatia planului determinat de un punct si doi vectori necoliniari:
$\vec{r}= \vec{r}_0+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$ sau in transcrie parametrica daca , $\vec{r}=(x,y,z)$,
$\vec{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ $\vec{u}=(k_1; l_1; m_1)$, $\vec{v}=(k_2; l_2; m_2)$ obtinem ecuatia :
$x=x_0+sk_1+tk_2$; $y=y_0+sl_1+tl_2$; $z=z_0+sm_1+tm_2$, unde $s ;t\in R$ sunt doi parametri reali, parametrii planului.
Ecuatia generala a planului : $ax+by+cz+d=0$ si $a^2+b^2+c^2\neq 0$
Ecuatia normala a planului: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, unde vectorul $\vec{n}=(a; b; c)$ se numeste vectorul normal la plan.
Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ coincid daca :
$a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2=d_1/d_2$
Ecuatii particulare:
Ecuatia planului care trece prin O : $ax+by+cz=0$
Ecuatia planului paralel cu Ox : $by+cz+d=0$, daca acest plan contine axa Ox, atunci el are ecuatia : $by+cz=0$
Ecuatia planului paralel cu Oy : $ax+cz+d=0$, daca acest plan contine axa Oy, atunci el are ecuatia : $ax+cz=0$
Ecuatia planului paralel cu Oz : $ax+by+d=0$, daca acest plan contine axa Oz, atunci el are ecuatia : $ax+by=0$
Ecuatia planului paralel cu xOy : $cz+d=0$, daca acest plan contine O, atunci el este chiar planul xOy si are ecuatia : $z=0$
Ecuatia planului paralel cu yOz : $ax+d=0$, daca acest plan contine O, atunci el este chiar planul yOz si are ecuatia : $x=0$
Ecuatia planului paralel cu zOx : $by+d=0$, daca acest plan contine O, atunci el este chiar planul zOx si are ecuatia : $y=0$
Daca A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), sunt punctele de pe axe, atunci ecuatia $x/a+y/b+z/c-1=0$ este ecuatia planului prin taieturi.
Distanta de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la un plan $ax+by+cz+d=0$ este:
$d(M ; P)=(| ax_0+by_0+cz_0+d |)/(\sqrt{a^2+b^2+c^2})$

Planul care contine punct $M(x_0, y_0, z_0)$ si doi vectori necoliniari $\vec{v}_1=(l_1; m_1; n_1)$, $\vec{v}_2=(l_2; m_2; n_2)$ are ecuatia: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\cdot\vec{v}_1 + \beta\cdot \vec{v}_2$, unde $\vec{r}$ si $\vec{r}_0$ sunt vectorii de pozitie ai punctului curent M si respectiv M_0, iar $\alpha, \beta \in R$.

Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ sunt perpendiculare daca si numai daca: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ sunt paralele daca si numai daca: $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$.
Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ coincid daca si numai daca: $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2=d_1/d_2$.

6.Ecuatia dreptei in spatiu
1.Ecuatia vectoriala a dreptei care trece prin punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ si are directia vectorului $\vec{v}=(l; m; n)$, este: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\cdot\vec{v}$, unde $\vec{r}$ si $\vec{r}_0$ sunt vectorii de pozitie ai punctului curent M si respectiv M_0, iar $\alpha \in R$.

2.Ecuatiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ si are directia vectorului $\vec{v}=(l; m; n)$, sunt:
$x=x_0+tl$; $y=y_0+tm$; $z=z_0+tn$, unde $t\in R$.

3.Ecuatiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ si are directia vectorului $\vec{v}=(l; m; n)$, sunt:
$(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$.

4.Ecuatia dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1; y_1 ;z_1)$ si $M_2(x_2; y_2 ;z_2)$ este : $\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, unde $t\in R$, iar $\vec{r}_1$ si $\vec{r}_2$ sunt vectorii de pozitie ai punctelor $M_1(x_1; y_1 ;z_1)$ si $M_2(x_2; y_2 ;z_2)$, $\vec{r}$ este vectorul de pozitie al punctului curent de pe dreapta.

5.Ecuatiile parametrice ale dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1; y_1 ;z_1)$ si $M_2(x_2; y_2 ;z_2)$ sunt :
$x=x_1+t(x_2 - x_1)$; $y=y_1+t(y_2 - y_1)$; $z=z_1+t(z_2 - z_1)$, unde $t\in R$

6.Ecuatiile canonice ale dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1; y_1 ;z_1)$ si $M_2(x_2; y_2 ;z_2)$ sunt :
$(x-x_1)/(x_2 -x_1)=(y-y_1)/ (y_2 -y_1)=(z-z_1)/ (z_2 -z_1)$.

7.Ecuatiile dreptei sub forma explicita, dreapta care trece prin punctul M(p,q,0) din planul xOy si are directia vectorului $\vec{v}=(\alpha;\beta;1)$, $\alpha\beta\neq 0$ sunt: $x=\alpha z+p$, $y=\beta z+q$.

8. Unghiul a doua drepte, φ, care au vectorii directori $\vec{u}_1$ si $\vec{u}_2$, este dat de formula : $\cos\varphi=|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|/(|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|)$

9. Unghiul(φ) unei drepte cu un plan, cu vectorii directori $\vec{u}$ si $\vec{n}$ vectorul normal la plan($\varphi'=\sphericalangle(\vec{u};\vec{n})$), este dat de formula :
$\varphi=\pi/2-\varphi'$ si $\cos\varphi'=|\vec{n}\cdot\vec{u}|/(|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|)$

10. Unghiul(φ) a doua plane, cu vectorii directori $\vec{n}_1$ si $\vec{n}_2$, vectorii normali ai planelor ($\varphi=\sphericalangle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)$), este dat de formula :
$\cos\varphi'=|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|/(|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|)$

1. $v=a\cdot i+b\cdot j+c\cdot k$, i,j,k= versorii(vectorii unitate), a,b,c parametrii directori, un reprezentant al vectorului poate fi seg.OP, iar P(a;b;c)
$i^2=j^2=k^2=1$, $i\cdot j=i\cdot k=j\cdot k=0$, modulul lui v, este $|v|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
2.Produsul scalar a doi vectori $u=a\cdot i+b\cdot j+c\cdot k$, $v=a'\cdot i+b'\cdot j+c'\cdot k$ este $u\cdot v=|u||v|\cos\varphi=aa'+bb'+cc'$, unde φ este unghiul dintre directiile vectorilor, deci $\cos\varphi=(aa'+bb'+cc')/(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2})$
3.Vectorii sunt egali, u = v daca a=a', b=b' si c=c'
4.$u+v=(a+a')i+(b+b')j+(c+c')k$, $u-v=(a-a')i+(b-b')j+(c-c')k$, $r\cdot u=ra\cdot i+rb\cdot j+rc\cdot k$
5.Vectorii sunt coliniari daca $u=r\cdot v$, unde $r\in R$
6.Vectorii sunt perpendiculari daca $uv=aa'+bb'+cc'=0$
7.Ecuatia dreptei in spatiu:
a) Ecuatia dreptei care trece prin punctul $P(x_0;y_0)$ si are directia vectorului $v=(a;b;c)=a\cdot i+b\cdot j+c\cdot k$: $(x-x_0)/a=(y-y_0)/b=(z-z_0)/c$
b)Ecuatia dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1;y_1;z_1)$ si $M_2(x_2;y_2;z_2)$:
$(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)=(z-z_1)/(z_2-z_1)$
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ este distanta M_1M_2
8.Ecuatia planului in spatiu :
a)Ecuatia generala a planului : $ax+by+cz+d=0$ si $a^2+b^2+c^2\neq 0$
b)Ecuatia normala a planului: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, unde vectorul n=(a; b; c) se numeste vectorul normal la plan si $P(x_0;y_0)$.
c)Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ coincid daca : $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2=d_1/d_2$
d)Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ sunt perpendiculare daca si numai daca: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.
e)Doua plane $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ si $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ sunt paralele daca si numai daca: $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$.
f)Daca A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), sunt punctele de pe axe, atunci ecuatia $x/a+y/b+z/c-1=0$ este ecuatia planului prin taieturi.
9.Distanta de la un punct $M(x_0,y_0,z_0)$ la un plan $ax+by+cz+d=0$ este: $d(M;P)=(|ax_0+by_0+cz_0+d|)/(\sqrt{a^2+b^2+c^2})$
10. Daca A(a;b;c) B(a';b';c') , si AM/MB=k, atunci M are coordonatele $x_1=(a+a'k)/(1+k)$ si $y_1=(b+b'k)/(1+k)$, $z_1=(c+c'k)/(1+k)$, daca k=1, M=mijlocul[AB], deci $x_1=(a+a')/2$ si $y_1=(b+b')/2$ $z_1=(c+c')/2$

Exercitii tip BAC-2007

1.Calculati:
a) sin $\pi/3$+cos $\pi/6$ b) $\sin^2(2007\pi/3)+\sin^2(2007\pi/6)$
c) $\sin^2(2007\pi/3)+\cos^2(2007\pi/3)$ d) sin2005π e) $\sin^2 3+\cos^2 3$
f) sinu daca u$\in$ [π /6; 3π /4] si cosu=-11/12 g) sinπ/2+cos5π/2
h) $\sin 3\cdot\sin^2(2\cdot 3)\cdot\sin^3(3\cdot 3)\cdot\ldots\cdot\sin^{2007}(2007\cdot 3)$ i) tg π /3 j) tg π /4
k) tg 3π /4 l) ctgπ/3$\cdot$ tgπ/3 m) sinπ/3$\cdot$ sin5π/3
n) $\sin^2\pi/5+\cos^2\pi/5$ o) $\sin^2 5+\cos^2 5$ p) $\sin^2 50^0+\cos^2 50^0$
q) 2sin π /12cos π /12
r) (sin10-sin1)(sin9-sin2)(sin8-sin3)....(sin2-sin9)(sin1-sin10)
s) $(\sin 1^0-\cos 1^0)(\sin 2^0-\cos 2^0)(\sin 3^0-\cos 3^0)\ldots(\sin 89^0-\cos 89^0)$

2.Sa se arate ca :
a) $\sin 45^0$ nu este numar rational
b) $\cos 45^0$ nu este numar rational
b) $\sin 45^0\cos 45^0$ este numar rational

3.Sa se arate ca : a) sin4>0 b) cos4 <0 c) sin3<0 d) cos2>0

4.Sa se determine semnul numarului : a) sin3 b) sin π/3 - cos π/3
c) sin π/2003 - cos π/2003 d) cos3 e) sin2 f) sin5 g) sin1

5. In triunghiul ABC dreptunghic in A se cere sa calculati:
a) sinB+ sinC b) $\sin^2 B+\cos^2 B$ c) sinB- sinC d) cosB+ cosC
e) cosB- cosC f) mediana AM daca BC=12 g) raza cercului
circumscris triunghiului daca AB=12 si AC=5

6.Calculati:
a) sin(B+C) intr-un triunghi in care sinA=$\sqrt{3}/2$
b) B+C daca sinA=$\sqrt{2}/2$

7.Rezolvati ecuatiile : a) sinx=-1/2 b) sin3x=-1 c) sin2x=0
d) sin3x=0 e) cos3x=1 f) cosx= $\sqrt{3}/2$ g) cos3x=-$\sqrt{3}/2$

8.Care este cel mai mare dintre numerele :
a) cos π/3 , sin π/2 , sinπ/6 , cosπ/4
b) sin3 , sin4 c) sin5 , sin6 , d) cos4, cos3
e) cos1 si $\sqrt{2}/2$ f) sin2 si cos2

9.Sa se determine sinA stiind ca laturile triunghiului ABC sunt:
a) AB=12; BC=32; AC=22 b) AB=10; BC=10; AC=6

10.Calculati aria :
a) unui triunghi care are o latura de 22 si inaltimea corespunzatoare ei de 32.
b) unui triunghi care are laturile de 12 si 8, iar unghiul dintre ele este egal cu $\pi/3$.
c) unui triunghi care are raza cercului inscris de $\sqrt{3}$ si perimetrul de 18.
d) unui triunghi care are virfurile in punctele A(-1;2), B(3;-2), C(-2;-5).
e) cercului cu ecuatia : $(x-11)^2+(y+16)^2=36$
f) unui patrat cu diagonala de $12\sqrt{2}$
g) unui cub cu diagonala de $\sqrt{3}$

11.Calculati inaltimile unui triunghi :
a) care are laturile de 20, 8 si 18
b) care are laturile de 20, 21 si 29
c) care are laturile de 12;13;5
d) care are doua laturi congruente si egale cu 10, iar unghiul dintre ele de 60^0.
e) care are doua laturi congruente si egale cu 16, iar baza de 12.
f) care are toate laturile congruente si egale cu 32.

12.Calculati sinA intr-un triunghi care are laturile AB=6, BC=18 si $m(<C)=60^0$.

13.Calculati sin15 folosind eventual formula sin(u-v)

14.Calculati inaltimile si laturile unui triunghi care are doua dintre laturi de 20 si un unghi de 120^0.

15.Sa se determine aria patratului cu perimetrul de 16.

16.Cite diagonale are un poligon convex cu 5, 6, 7 laturi ?

17.Sa se determine aria cubului cu muchia de 5.

18.Se da cubul ABCDA’B’C’D’ si M mijlocul lui [BC], iar N mijlocul lui [A’D’]. Se cere sa calculti o functie trigonometrica a unghiului format de BD’ cu MN. Aceeasi problema pentru o diagonala a cubului si o fata laterala a sa.

19.Calculati lungimea medianei AM a triunghiului :
a)cu virfurile in punctele : C(13;-14), A(-12;11) , B(-11;-16) . Calculati si perimetrul acestui triunghi.
b)cu laturile AB=12, AC=12, BC=5
c) cu laturile AB=12, AC=12, BC=$12\sqrt{2}$

20.Sa se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului determinat de urmatoarele trei puncte A(-1;3) , B(4;-12), C(-4;-2).

21.Sa se determine parametrul real $m \in$ **R,** si coordonatele virfurilor triunghiului determinat de urmatoarele trei puncte A(m-3;2) , B(-4;3m-2), C(m+2;-8), stiind ca centrul de greutate al triunghiului este in punctul G(-6;11).

22.Sa se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului determinat de urmatoarele trei puncte A(m-1;4) , B(-3;2m-1), C(m+1;-2), stiind ca centrul de greutate este pe axa Ox.

23.Sa se determine natura patrulaterului determinat de urmatoarele patru puncte A(3;-2) , B(12;-1), C(15;5) , D(6;5).
Calculati coordonatele punctului de intersectie a diagonalelor patrulaterului si perimetrul patrulaterului.

24.Sa se determine parametrii reali a,b astfel incit punctul D(a;b) sa fie cel de-al patrulea virf al paralelogramului ABCD :
a) A(-2;3) , B(5;-16), C(-1 ;-5)
c) A(-3 ;5) , B(-1;-1), C(-1 ;2)

25.Sa se calculeze modulul vectorilor :
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ a) $\vec{u} = -7\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$ b) $\vec{v} = -4\cdot\vec{i}+\vec{j}-2\cdot\vec{k}$

26.Sa se determine parametrul real a astfel incit modulul vectorilor :
a) $\vec{u} = -7\cdot\vec{i}+a\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$ sa fie 12 b) $\vec{v} = (a-4)\cdot\vec{i}+a\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$

27.Sa se calculeze 1/u daca :

28.Sa se calculeze u+v si u-v si uv si 3u si -2v daca :
a) $\vec{u}=2\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$ si $\vec{v}=-2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-7\cdot\vec{k}$

29.Sa se calculeze produsul scalar al vectorilor :
a) $\vec{u}=2\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$ si $\vec{v}=-2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-7\cdot\vec{k}$

Rezolvare:
Daca $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)$ si $\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)$ atunci produsul scalar
$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
Deci $\vec{u}=(2;5;-3)$ si $\vec{v}=(-2;3;-7)$ atunci produsul scalar
$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)(-2)+(5)(3)+(-3)(-7)=-4+15+21=32$

b) $\vec{u}=\vec{i}-2\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}$ si $\vec{v}=-3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+\vec{k}$

c) $\vec{u}=3\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$ si $\vec{v}=-5\cdot\vec{i}+14\cdot\vec{j}$

30.Sa se calculeze cosinusul unghiului format de vectorii :
a) $\vec{u}=2\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}$ si $\vec{v}=-5\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$ b) $\vec{u}=-\vec{i}+2\cdot\vec{j}$, $\vec{v}=-3\cdot\vec{i}+\vec{j}$

c) $\vec{u}=\vec{i}-3\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$ si $\vec{v}=-2\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+\vec{k}$

d) $\vec{u}=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$ si $\vec{v}=-2\cdot\vec{i}+10\cdot\vec{j}$

31.Sa se determine $a\in R$ astfel incit vectorii sa fie perpendiculari:
a) $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$ si $\vec{v}=-2\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}$

32.Sa se scrie un vector paralel cu:
a) $\vec{u}=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$ b) $\vec{v}=-2\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}$

33.

34.Sa se determine ecuatia dreptei care trece prin punctul P(-1;3;-5) si este paralela cu dreapta de ecuatie : $(x-4)/5=(y+2)/(-2)=(z-4)/3$.

Rezolvare:
Ecuatiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $P(x_0,y_0,z_0)$ si are directia vectorului $\vec{v}=(l;m;n)$, sunt:

$(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$, rezulta ca $P(x_0=-1;y_0=3;z_0=-5)$ si $\vec{v}=(l=5; m=-2; n=3)$, deci ecuatia este : $(x+1)/5=(y-3)/(-2)=(z+5)/3$.

Aceeasi problema daca:
b) P(1;-3;-2) si $(x+3)/(-4)=(y-3)/(2)=(z-4)/(-3)$
c) P(2;-3;1) si $(x-2)/(-5)=(y+4)/(-2)=(z-4)/(-2)$
d) P(-5;-1;3) si $(x+1)/6=(y-2)/(-5)=(z-2)/(-4)$

35.Sa se gaseasca coordonatele punctelor de intersectie dintre:
a) dreapta $y=-3x+1$ si parabola $y^2=6x$
b) dreapta $y=-5x$ si hiperbola $x^2/16-y^2/25=1$
c) dreapta $3x-2y=1$ si elipsa $x^2/8+y^2=1$
d) dreapta $3x-2y=1$ si cercul $x^2+y^2=4$
e) parabola $x^2=-6y$ si parabola $y^2=6x$
f) dreapta $-5x-y=12$ si axele de coordonate si prima bisectoare
g) dreapta $–x+4y=2$ si prima bisectoare
h) dreptele $–2x-y=12$ si $3x-4y+5=0$

36.Sa se determine parametrii reali a,b,c astfel incit punctele sa apartina curbelor date :
a) A(-2;3) , B(5;-16) sa fie pe dreapta $y=ax+b$
b) A(a-1 ;-5), B(-3 ;a+5) sa fie pe $3x-2y+8=0$
c) P(-3 ;5) sa fie pe cercul $(x-a)^2+(y+16)^2=25$
d) P(0 ;5√2) sa fie pe elipsa $x^2/12+y^2/a=1$
e) A(-1;-2) , B(2;-1) sa fie pe $x+ay+b=0$
f) A(-5 ;8) sa fie pe cercul $x^2+y^2=a$
d) P(a ;√2) sa fie pe elipsa $x^2/2+y^2/12=1$

37.Sa se determine parametrii reali a,b,c astfel incit punctul P(a;b;c) sau P(a;b) , dupa caz sa apartina planelor/dreptelor/curbelor date :
a) $y=-3x+2$ b) $x-2y+2=0$ c) $(x-2)^2+(y+6)^2=5$ d) $x^2/2+y^2/3=1$
e) $x-y+10=0$ f $x^2+y^2=4$ g $x^2/5+y^2/2=2$ h $x+y+z=6$

38 Sa se determine parametrul real a astfel incit dreapta $x-2ay+5=0$ sa fie paralela cu dreapta $–x-y+2=0$

39. Fie A(-2;1) , B(1;-6) si M(a ;b). Determinati coordonatele punctului M astfel incit acesta sa fie simetricul lui A fata de B.

40.Cite puncte din interiorul cercului $x^2+y^2=2$ au ambele coordonate numere intregi ?

41.Sa se determine aria unui triunghi echilateral cu virfurile pe cercul: $x^2+y^2+7=0$. Calculati si perimetrul triunghiului.

42.Sa se determine aria triunghiului cu virfurile in punctele :
a) O(0;0), A(-2;3) , B(5;-16) b) C(3;-4), A(-2;1) , B(-1;-6)
c) O(0;0), A(-3;8) , B(-5;-6) d) C(4;-4), A(-2;6) , B(-3;-6)

43.Sa se arate ca triunghiul cu virfurile in punctele date, este :
a) dreptunghic: O(0;0), A(-2;3) , B(5;-16) .
b) echilateral :C(3;-4), A(-2;1) , B(-1;-6) .
c) isoscel : C(3;-2), A(-3;2) , B(-6;-6) .

44.Sa se determine/stabileasca :
b) daca punctele A(0;-4), B(;-12;7), C(-1;3) sunt coliniare sau nu.
a) daca punctele A(-1;2;3), B(3;-2;3), C(1;0;-1), D(2;-3;3), sunt coplanare sau nu.
b) daca punctele A(-1;0;-3), B(2;-1;2), C(-1;3;-1) sunt coliniare sau nu.
b) daca punctele A(-2;1;-3), B(-2;-4;5), respectiv C(-1;2;-3), D(0;-2;1) determina doua drepte perpendiculare.
b) daca punctele A(-5;3;6), B(-1;8;-4), C(-1;12;-3), formeaza un triunghi isoscel.
b) parametrii reali a,b,c daca punctele A(-1;-1;2), B(1;-2;3), C(-1;1;-3), sunt in planul $ax+by+cz+8=0$.
b) parametrii reali a,b,c daca punctele A(3;-1;4), B(2;-2;1), C(-3;2;-3), sunt in planul $x+by+cz+a=0$.
b) parametrul real a astfel incit punctele A(-1;a;6), B(-1;2;-4), C(-1;2;-3), sa fie coplanare.
b) parametrul real a astfel incit punctul A(a;-6) sa fie pe dreapta $-3x+y-7=0$.
b) parametrul real a astfel incit dreptele
$-3x+y-7=0$ si $x+(2a-1)y-8=0$ sa fie perpendiculare/paralele/ sa faca intre ele un unghi de 60.
b) parametrii reali a,b astfel incit punctele A(a;-2) si B(-1;b) sa fie pe dreapta $-2x+3y-12=0$.
b) ecuatia planului care trece prin punctul A(-3;-2;5) si este paralel cu planul $-2x+y+3z-8=0$.

b) ecuatia dreptei $y=ax+b$ care trece prin punctul A(2;-3) si este perpendiculara pe directia $2x-y+9=0$
b) ecuatia planului care trece prin punctul A(-1;2;-3) si este perpendicular pe directia $\vec{n}=(1;2;3)$.
h) coordonatele unui punct de pe parabola $y^2=-12x$
b) parametrul real a astfel incit punctele A(-1;a;6), B(-1;2;-4), C(-1;2;-3), sa determine laturile unui triunghi echilateral.

45.Sa se calculeze distanta :
a) de la A(-3;2) la dreapta $y=-3x+4$
b) de la A(-1;-2 ;0) la planul $-3x+2y-4z=0$
c) dintre punctele A(-1;32) si B(-3;7)
d) de la A(-8;2 ;-3) la planul xOz
e) de la A(3;-12 ;-4) la planul xOy
f) de la A(-2;2 ;1) la planul yOz
g) dintre punctele A(-2;3) si B(5;-16) .
h) dintre punctele A(-1;-2;3) si B(0;-5;-1) .

46.Sa se stabileasca daca :
a) punctul A(-3;-9) este pe dreapta $y=-3x+11$
b) punctul A(-1;-1 ;1) este in planul $-x+2y-z=0$
a) daca punctele A(-1;-2) si B(-3;4) sunt pe cercul $(x-1)^2+(y+2)^2=8$
b) daca punctul A(-1;2 ;-1) este in planul xOz
b) daca punctul A(3;-12 ;0) este in planul xOy
b) daca punctul A(0;2 ;1) este in planul yOz
a) daca punctele A(-2;0), B(4;$-3\sqrt{3}$) si C(5;-16) sunt pe hiperbola $x^2/4-y^2/9=1$
a) daca punctele A(-2;5) , C(0;-5)si B(3;-6) sunt pe hiperbola $x^2/2-y^2/25=1$
a) daca punctele A($2\sqrt{5}$;-3), C(-2;$\sqrt{2}$) si B(0;-2) sunt pe hiperbola $x^2/16-y^2/4=-1$
a) daca punctele A(-2;3) si B(-3;-27) sunt pe hiperbola $xy=81$.
b) daca punctele A(-1;-2) si B(10;-40) sunt pe parabola $y^2=160x$.
a) daca punctele A($-2\sqrt{3}$;$5\sqrt{2}/2$) si B(5;-16), C(0;-5)sunt pe elipsa $x^2/24+y^2/25=1$

47.Sa se arate ca punctul $A(6n/(n^2+9); (n^2-9)/ (n^2+9))$ este pe cercul $x^2+y^2=1$, pentru orice $n\in N$. Sa se arate ca pe acest cerc sunt cel putin 2007 puncte cu coordonatele rationale.

48.Sa se determine ecuatia tangentei la :
a) cercul $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ in punctul P(-1;3)
b) parabola $y^2=3x$ in punctul P(27;-9)
c) hiperbola $2x^2-5y^2=5$ in punctul P(-5;-3)
d) elipsa $x^2+3y^2=25$ in punctul P(-1;-2√2)

49.Sa se determine ecuatia :
a) cercului cu centrul in punctul P(-2;2) si tangent dreptei x+2y-6=0
b) cercului cu centrul in P(-6;-12) si care trece prin punctul A(-7;12)
c) cercului cu diametrul determinat de punctele P(-4;2) si A(-2;8)
d) parabolei cu focarul in punctul P(10;0)
e) hiperbolei cu distanta focala 22 si virful A(2;0)
f) dreptei paralela cu dreapta x=-1/2
g) dreptei paralela cu dreapta 2y-x=-1/2
h) dreptei paralela cu dreapta y=-2
i) dreptei paralela cu dreapta x=12
j) cercului care trece prin punctele A(-1;2), B(-5;-8), C(4;12)
k) hiperbolei cu focarele F(4/√5,0) si virful A(1;0)
l) elipsei cu focarele F(4;0) si virful A(12;0)

50.Sa se calculeze coordonatele proiectiilor punctelor:
a) A(-12;35) si B(9;-16) pe axa Ox b) A(-2;5;-11) si B(-9;-1;14) pe axa Oz, Oy si Ox c) A(-12;-8;1) si B(-8;10;-4) pe planele xOz, zOy si yOx si pe planul x+2y-3z=0.

51.Sa se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu virfurile in punctele A, B, C:
a) A(-1;-2), B(-3;-2) si C(3;-1) b) A(6;-2), B(-4;-6) si C(-4;12).

52.Sa se determine coordonatele punctului de intersectie dintre dreapta (x-3)/6=(y+5)/(-10)=(z-2)/12 cu planul:
a) z=0 b) x=0 c) y=0 d) x+2y-z=0 e) 3x-y+2z=10 f) -x+y-4z=6
g) A(-5;-2), B(4;-2) si C(2;-1) h) A(1;-8), B(-3;-2) si C(6;-8).

53.Sa se determine coordonatele punctului P(a ;b) de pe cercul $x^2+y^2=25$ stiind ca :
a) are coordonatele numere intregi. b) are coordonatele egale.

54.Sa se determine coordonatele mijlocului segmentului [AB]:
a) A(0;-2), B(2;-8) b) A(-1;0;-2), B(-3;2;-2) c) A(-10;8), B(-2;6).

a) A(-20;-12), B(12;-18)   b) A(-2;4;6), B(-1;8;-2) c) A(4;2), B(-2;-8).

55.Sa se determine elementele :
a) cercului $(x-4)^2+(y-15)^2=32$ b) cercului $4x^2+21y^2=12$
c) elipsei $x^2+y^2/12=1$ d) hiperbolei $x^2/28-4y^2=1$
e) parabolei $y^2=3x$ f) elipsei $4x^2+36y^2=1$

56.Sa se determine ecuatia :
a) dreptei care trece prin punctele A(-4; -2) si B(1;0)
b) cercului cu centrul in C(-4; 5) si raza r=25

57.Sa se calculeze volumul tetraedrului cu virfurile in punctele:
a) A(0;-1;2), B(-3;2;1), C(1;3;-2), D(2;-1;1).
b) A(-1;12;8), B(-2;-2;4), C(3;4;-8), D(6;-10;12).