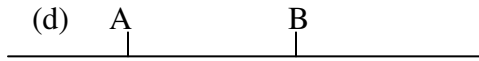


# 1.PUNCTUL.DREAPTA.PLANUL

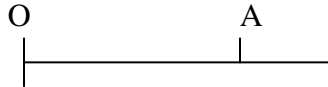
**1.Punctul A**

• A    •E=F    P•    Q•    P≠Q

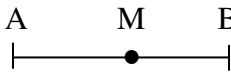
**2.Dreapta d sau dreapta AB**



Semidreapta OA, notata [OA sau (OA, adica fara O



**3.Segmentul AB, notat [AB] (AB),[AB),(AB]**



**M este mijlocul lui [AB] daca MA=MB=AB/2 sau [MA]=[MB](=AB/2)**

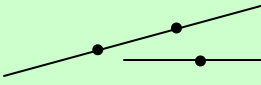
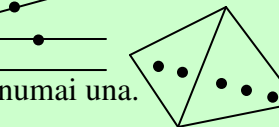
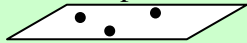
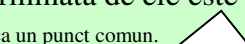
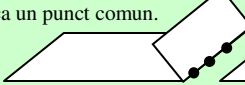
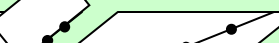
**4.Definitie :**

Orice multime nevida de puncte este o **figura geometrica**

Punctul, dreapta si planul sunt multimi de puncte, deci sunt figuri geometrice.

- $M \neq N$       **puncte distincte sau diferite**      M•      N•      E=F•
- $E=F$       **puncte identice sau confundate**

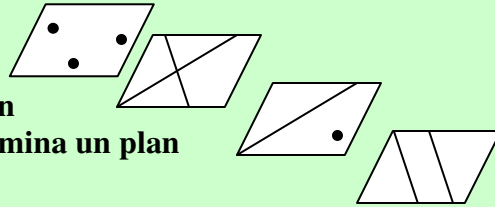
## 5.Axiomele geometriei in spatiu:

- 1.Prin doua puncte distincte trece o dreapta si numai una. 
- 2.Printr-un punct exterior unei drepte trece o paralela la dreapta data si numai una. 
- 3.Trei puncte necoliniare determina un plan. 
- 4.Daca doua puncte sunt intr-un plan atunci si dreapta determinata de ele este in acel plan. 
- 5.Daca doua plane au un punct comun atunci ele mai au cel putin inca un punct comun. 
- 6.Exista patru puncte necoplanare. 

**Consecinta: Doua plane care au un punct comun au o dreapta; cu alte cuvinte, intersectia a doua plane care au un punct comun este o dreapta (si nu altceva).**

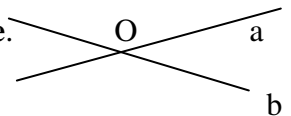
## 6.Determinarea planului:

- Trei puncte determina un plan
- Doua drepte concurente determina un plan
- O dreapta si un punct nesituat pe ea determina un plan
- Doua drepte paralele determina un plan



Notatii : planul se noteaza cu litere grecesti mici, sau cu 3 litere latine intre paranteze.  $\alpha = (ABC)$

Doua drepte care au un singur punct comun se numesc **drepte concurente**.

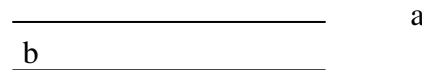


$$a \cap b = \{O\}; O \text{ este punctual de intersectie}$$

Doua drepte a si b din acelasi plan care nu au nici un punct comun se numesc **drepte paralele**

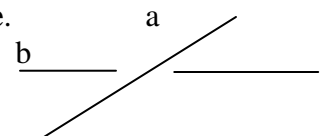
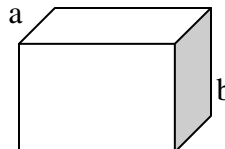
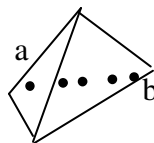
$a \parallel b$

$$a \cap b = \emptyset$$



Doua drepte nesituate in acelasi plan se numesc **drepte necoplanare**.

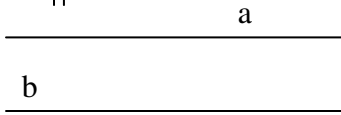
$$a \cap b = \emptyset$$



## 2.DREPTE PARALELE

**Definitie.** Doua drepte coplanare care nu au nici un punct comun sunt paralele.

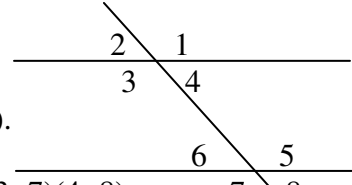
scriem  $a \parallel b$



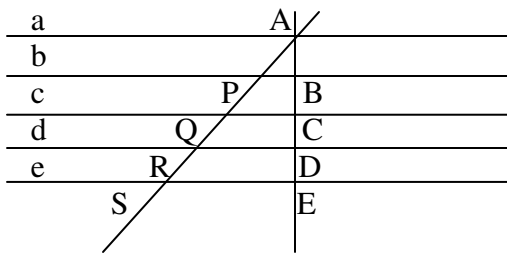
**Axioma paralelelor:** Printr-un punct exterior unei drepte putem construi doar o paralela la acea dreapta.

**Tr.1.** Doua drepte paralele formeaza cu o secanta :

1. Unghiuri alterne interne congruente  $(3 \cong 5)(4 \cong 6)$ .
2. Unghiuri alterne externe congruente  $(2 \cong 8)(1 \cong 7)$ .
3. Unghiuri corespondente congruente  $(2 \cong 6)(1 \cong 5)(3 \cong 7)(4 \cong 8)$ .
4. Unghiuri interne si de aceeasi parte a secantei suplementare.  $(3+6=180^\circ)(4+5=180^\circ)$
5. Unghiuri externe si de aceeasi parte a secantei suplementare.  $(2+7=180^\circ)(1+8=180^\circ)$



**Tr.2.** Mai multe drepte paralele echidistante determina pe orice secanta segmente congruente.

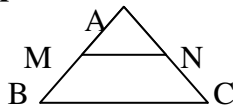


$a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e$  si  $[AB] \cong [BC] \cong [CD] \cong [DE]$ , rezulta  $[AP] \cong [PQ] \cong [QR] \cong [RS]$

Daca in locul dreptelor  $\parallel$  luam plane  $\parallel$  tr.ramine valabila.

**Tr.3.** Daca M este mijlocul laturii  $[AB]$ , iar  $MN \parallel BC$ , atunci N este mijlocul lui  $[AC]$ .

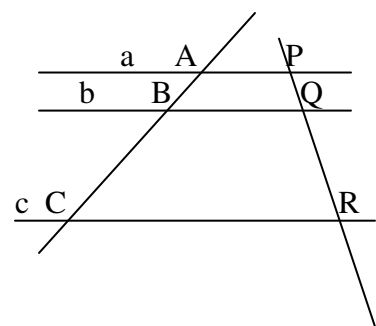
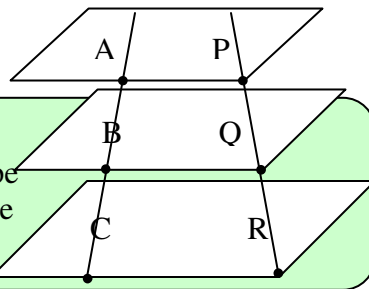
**Tr.4.** Thales O paralela la una din laturile unui triunghi formeaza pe celelalte doua segmente proportionale.



$MN \parallel BC$  rezulta  $AM/MB = AN/NC$

**Tr.5.** Mai multe drepte paralele neechidistante determina pe doua secante segmente proportionale.

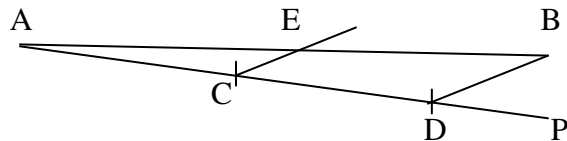
$a \parallel b \parallel c$  rezulta  $AB/BC \cong PQ/QR$



**Tr.6.** (Thales in spatiu)  
Mai multe plane  $\parallel$  determina pe 2 secante care le taie, segmente proportionale.

**Tr.** Cum impartim un segment in doua parti congruente.

- luam in compas o lungime oarecare
- construim dreapta oarecare AP
- cu compasul luam  $[AC] \cong [CD]$  pe dr. AP
- unim D cu B
- ducem  $CE \parallel DB$
- conform tr.Thales  $1 = AC/CD = AE/EB$ , deci si  $AE = EB$



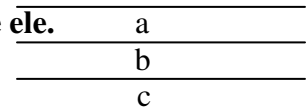
**Tr.** Cum impartim un segment dat in n parti congruente :

- ca mai sus, dar in loc sa luam pe AP, 2 segmente  $\cong$ , luam n segmente  $\cong$

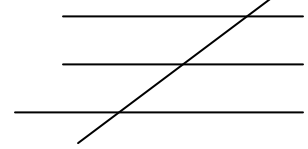
Tr.Linia mijlocie a triunghiului este paralela cu latura a treia si egala cu jumatate din ea.

- daca MN este linie mijlocie in  $\Delta ABC$  (M si N sunt mijloacele laturilor  $\Delta ABC$ ) atunci  $MN \parallel BC$  si  $MN = BC/2$  (vezi desenul de la tr.Thales).

**Tr.6. Doua drepte paralele cu o a treia dreapta sunt paralele intre ele.**  
 $a \parallel b$  si  $b \parallel c$ , atunci si  $a \parallel c$



**Tr.7. Daca dreapta a intersecteaza dreapta b intr-un punct, atunci ea intersecteaza orice paralela la dreapta b tot intr-un punct.**



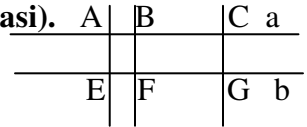
**Tr.8. Doua unghiuri cu laturile paralele sunt congruente sau suplementare.**

**Tr.9. Daca dreapta  $a \perp b$ , atunci ea este perpendiculara pe orice paralela la dreapta b.**

**Tr.10. Distaanta dintre doua drepte paralele este constanta (mereu aceeasi).**

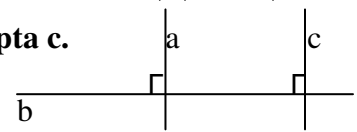
$AE \perp a, AE \perp b, BF \perp a, BF \perp b, CG \perp a, CG \perp b$

Concluzia :  $AE=BF=CG = \dots$



**Tr.11. Daca dreapta  $a \perp b$  si  $c \perp b$ , atunci a este paralela cu dreapta c.**

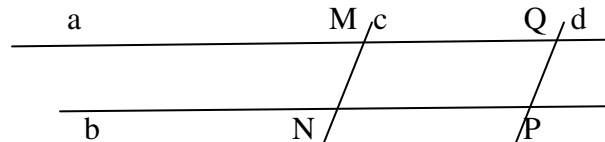
$a \parallel c$



**Tr.12. Doua drepte paralele determina pe alte doua drepte paralele pe care le intersecteaza segmente congruente.**

$a \parallel b$  si  $c \parallel d$ , rezulta  $MN=PQ$

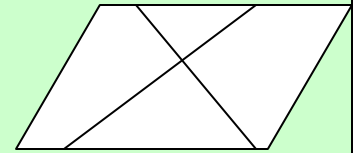
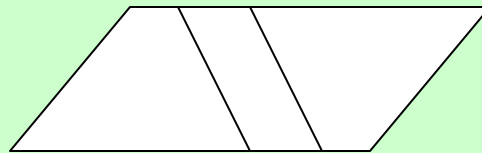
$MNPQ = \text{paralelogram}$



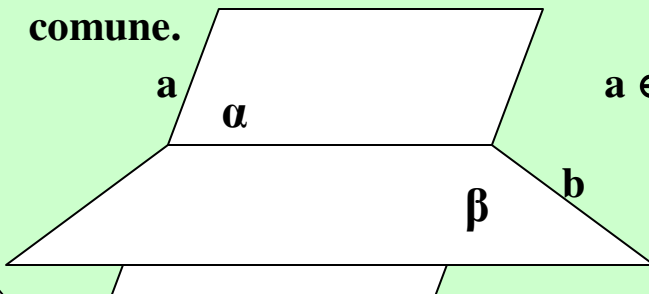
## Pozitiile relative a doua drepte in spatiu:

### 1. Doua drepte din spatiu pot fi coplanare:

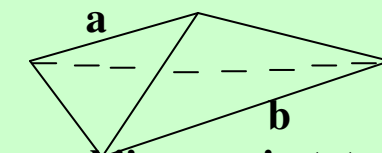
1. Doua drepte distincte pot avea in comun un singur punct, in acest caz sunt si coplanare si se numesc drepte concurente.
2. Doua drepte coplanare care nu au nici un punct comun sunt paralele.



**2. Doua drepte din spatiu pot fi necoplanare, adica nu sunt nici paralele si nici concurente, dar nici nu au puncte comune.**



$a \in \alpha$  si  $b \in \beta, a \cap b = \emptyset$

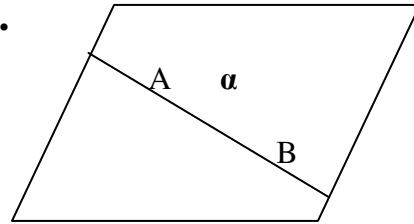


**muchii opuse in tetraedru**

### 3. Pozitiile relative ale unei drepte fata de un plan:

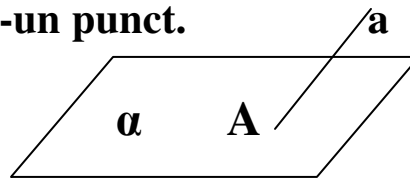
1. O dreapta poate avea doua puncte comune cu un plan ; in acest caz dreapta este inclusa/continuta in plan.

$$A \in \alpha \text{ si } B \in \beta, AB \subset \alpha$$



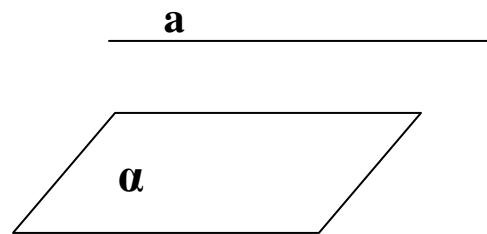
2. O dreapta poate avea un singur punct comun cu un plan ; in acest caz dreapta inteapa planul intr-un punct.

$$A \in \alpha, A \in a, a \cap \alpha = \{A\}$$



3. O dreapta poate avea nici un punct comun cu un plan ; in acest caz dreapta este paralela cu planul.

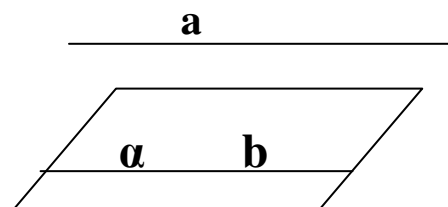
$$a \parallel \alpha, a \cap \alpha = \emptyset$$



Tr.13. O dreapta paralela cu o dreapta din plan este paralela cu planul.

$$a \parallel b, a \cap \alpha = \emptyset, \text{ deci } a \parallel \alpha$$

$$b \subset \alpha$$



**Ex.1.** Un cub ABCDA'B'C'D' are prin definitie toate fetele patrute. Se cere sa desenati cubul si sa identificati, folosind notatiile indicate, drepte paralele cu plane.

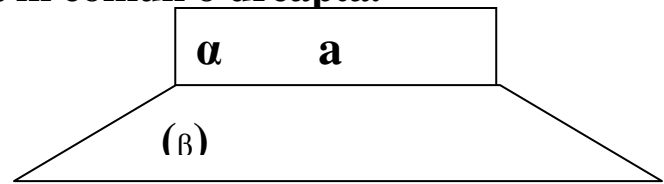
**Ex.2.** Fie ABCD, un tetraedru oarecare si M,N mijloacele laturilor AB si BC. Spuneti daca MN este paralela cu planul (BCD), dar cu planul (ACD) ?

**Ex.3.** Fie piramida VABCD, cu baza dreptunghiul ABCD si dreapta  $a \parallel BC$ . Dreapta a este paralela cu AD, dar cu (VAD) ?

#### 4. Pozitiile relative a doua plane:

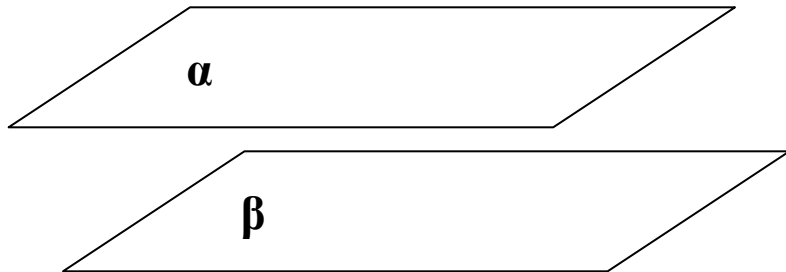
1. Doua plane distincte pot avea in comun o dreapta.

$$\alpha \cap \beta = a, a \subset \alpha, a \subset \beta$$



2. Doua plane distincte pot fi paralele (nu au nici un punct comun).

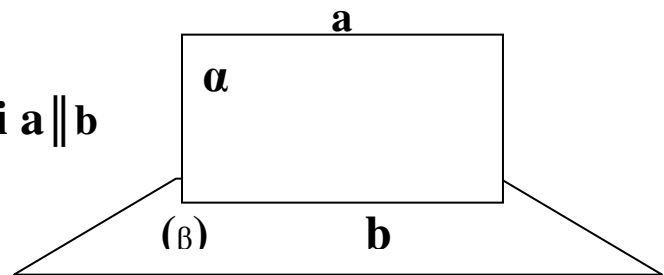
$$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \beta = \emptyset$$



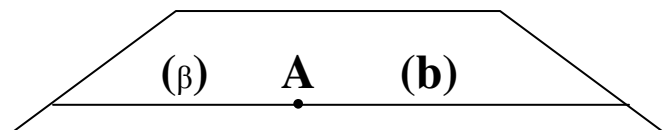
Tr.14. Daca o dreapta (d) este paralela cu un plan atunci orice plan care contine dreapta (d) si intersecteaza planul, o face dupa o dreapta paralela cu dreapta data (d).

$$\text{Daca, } a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b \text{ atunci } a \parallel b$$

$$a \subset \alpha$$



Tr.15. Daca,  $a \parallel \beta$  si prin punctul  $A \in \beta$  ducem paralela  $b \parallel a$  atunci dreapta  $b$  este continuta in planul  $\beta$ . (a)

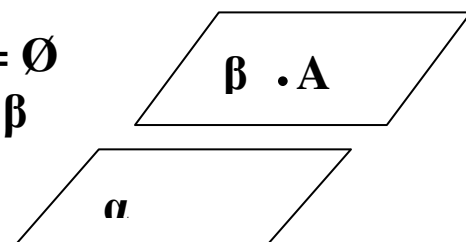


Tr.16. Printr-un punct exterior unui plan putem duce un singur plan paralel cu planul dat.

$$\text{Fie } A \notin \alpha \text{ si } A \in \beta \text{ si } \beta \parallel \alpha, \alpha \cap \beta = \emptyset$$

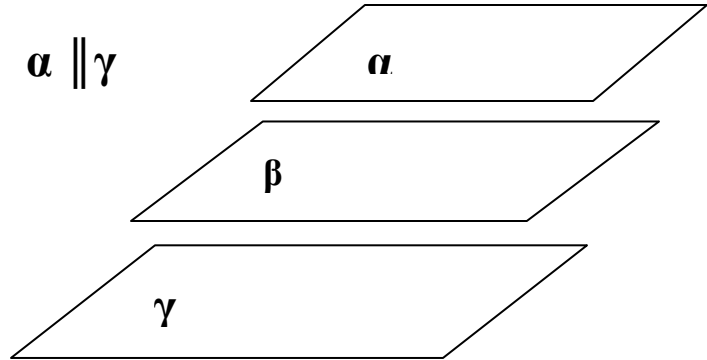
Oricare alt plan  $\gamma \parallel \alpha$  coincide cu  $\beta$

daca  $A \in \gamma$



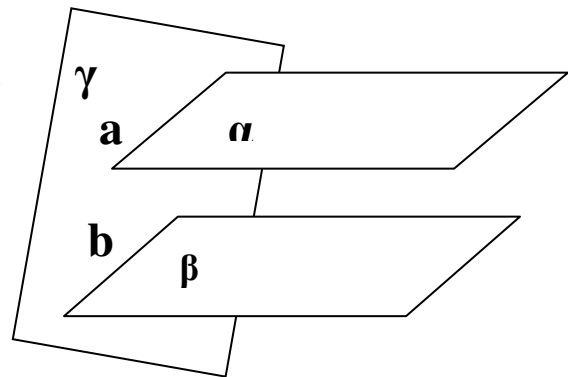
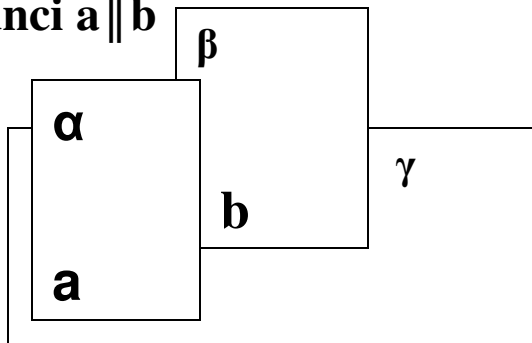
**Tr.17. Doua plane distincte paralele cu un al treilea plan diferit de ele, sunt paralele intre ele.**

Fie  $\alpha \parallel \beta$  si  $\gamma \parallel \beta$  atunci  $\alpha \parallel \gamma$



**Tr.18. Doua plane paralele sunt taiate de un al treilea plan dupa drepte paralele.**

Daca  $\alpha \parallel \beta$  si  $\gamma \cap \beta = b$ ,  $\gamma \cap \alpha = a$  atunci  $a \parallel b$

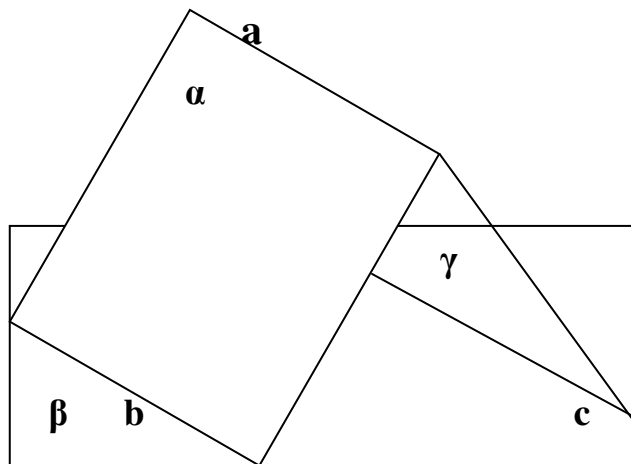
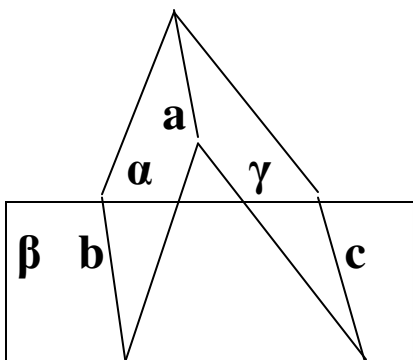


**Tr.19. Daca trei plane distincte se intersecteaza doua cite doua dupa cite o dreapta, atunci cele trei drepte sunt paralele. (Tr.acoperisului)**

Daca  $\alpha \cap \beta = b$ ,  $\gamma \cap \alpha = a$

$\gamma \cap \beta = c$

atunci  $a \parallel b \parallel c$

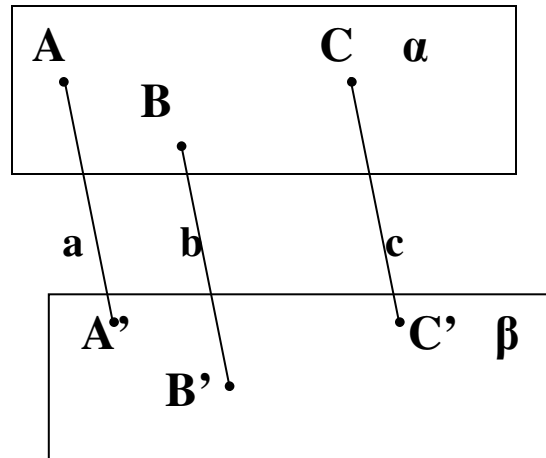


**Tr.20.** Doua plane paralele determina pe doua sau mai multe drepte paralele segmente congruente.

Daca  $\alpha \parallel \beta$  si  $a \parallel b \parallel c$ , atunci

$$AA' \equiv BB' \equiv CC'$$

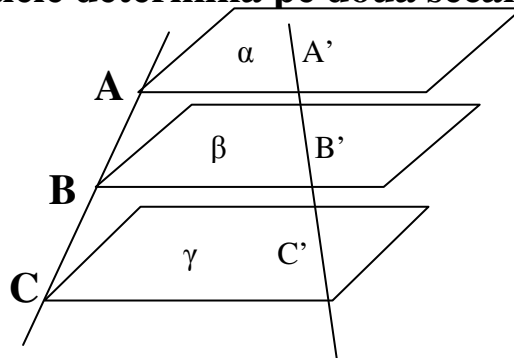
Distanța dintre 2 plane paralele este constantă.



**Tr.21.** Mai multe plane paralele determina pe doua secante segmente proportionale. (Tr. Thales)

Daca  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$

atunci  $AB/A'B' = BC/B'C'$



**Ex.4.** Fie cubul ABCDA'B'C'D'. Demonstrati ca  $AC \parallel A'C'$ ,  $AB \parallel D'C'$  si  $AB' \parallel DC'$ .

**Ex.5.** Fie ABCD si CDEF doua dreptunghiuri aflate in plane diferite. Demonstrati ca AB este paralela cu EF. AB este paralela cu DE ?

**Ex.6.** Fie VABCD o piramida cu baza trapez ( $AB \parallel CD$ ) si  $d = (VAB) \cap (VCD)$ . Ce pozitie are dreapta d fata de AB si CD ?

**Ex.7.** Fie ABCD tetraedru oarecare si MN linie mijlocie in  $\Delta ABC$ , iar EF linie mijlocie in  $\Delta BCD$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$ ,  $E \in BD$ ,  $F \in CD$ .

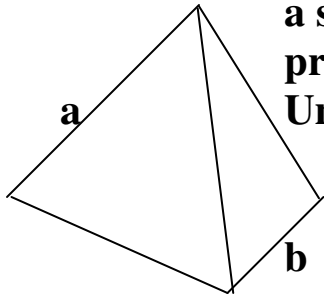
Demonstrati ca  $MN \parallel EF$ .

**Ex.8.** Fie cubul ABCDA'B'C'D' si M, N, P, Q puncte pe laturile  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  la  $1/3$  de baza, iar  $O = AC \cap BD$ ,  $O' = A'C' \cap B'D'$ , iar  $S = (MNP) \cap OO'$ . Aflati  $O'S/O'O$ ,  $C'S/SA$ .

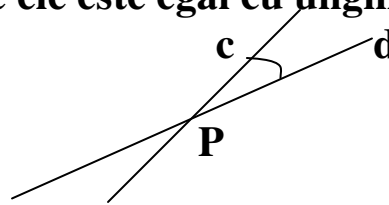
**Ex.9.** In planul  $\alpha$  avem dreptunghiul ABCD, iar in planul  $\beta$  patrulaterul A'B'C'D'. Stiind ca  $\alpha \parallel \beta$  si  $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$  demonstrati ca A'B'C'D' este tot un dreptunghi.

## 4. Perpendicularitate in spatiu:

**1. Unghiul a doua drepte oarecare din spatiu este egal cu unghiul format de doua drepte paralele cu dreptele date si concurente. Spunem ca paralelismul pastreaza unghiurile.**



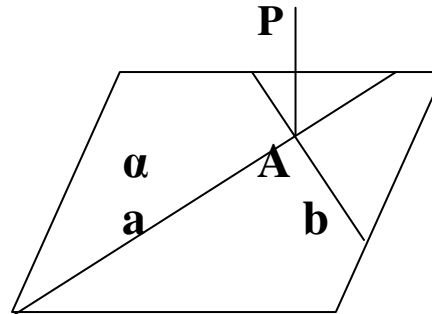
a si b sunt doua drepte necoplanare, ducem printr-un punct P doua drepte  $c \parallel a$  si  $d \parallel b$ . Unghiul dintre ele este egal cu unghiul dintre a si b.



**2. Doua drepte oarecare din spatiu sunt perpendiculare daca doua drepte paralele cu dreptele date si concurente formeaza intre ele un unghi de  $90^\circ$  (perpendiculare). Deci daca unghiul dintre ele are  $90^\circ$ .**

**Tr.22. O dreapta perpendiculara pe doua drepte concurente este perpendiculara pe plan.**

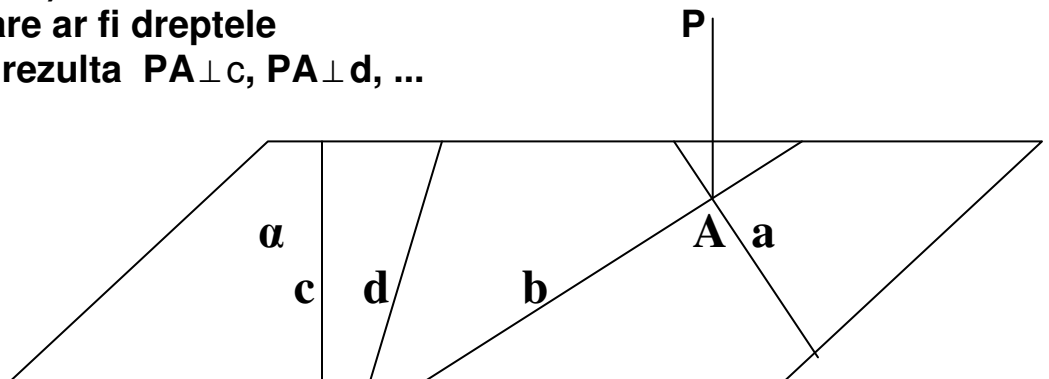
$a \cap b = \{A\}$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$   
 $PA \perp a$ ,  $PA \perp b$ , rezulta  
 $PA \perp \alpha$



**Tr.23. O dreapta perpendiculara pe un plan este perpendiculara pe orice dreapta din plan.**

Daca  $PA \perp \alpha$  (adica PA este  $\perp$  pe doua drepte concurente a si b,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ ,  $PA \perp a$ ,  $PA \perp b$ )

Rezulta ca oricare ar fi dreptele  $c \subset \alpha$ ,  $d \subset \alpha$ , etc... rezulta  $PA \perp c$ ,  $PA \perp d$ , ...

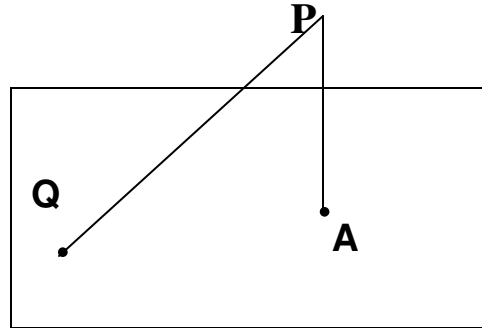


**Tr.24.** Dintr-un punct exterior unui plan putem construi o singura perpendiculara pe acel plan.

Daca  $PA \perp \alpha$ ,  $A \in \alpha$ ,  $P \notin \alpha$  si  $Q \in \alpha$  rezulta ca  $PQ$  nu este  $\perp \alpha$

si  $PQ > PA$  oricare ar fi  $Q \in \alpha$ .

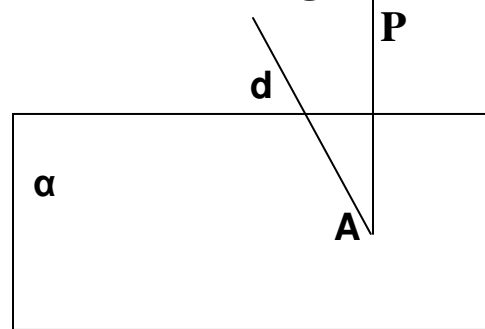
$A$  este proiectia lui  $P$  pe plan, iar  $QA$  este proiectia lui  $PQ$  pe plan  
 $AQ = PQ \cos(\angle PQA)$



**Tr.25.** Intr-un punct al unui plan putem construi o singura perpendiculara pe acel plan.

Daca  $PA \perp \alpha$ ,  $A \in \alpha$ ,  $P \notin \alpha$

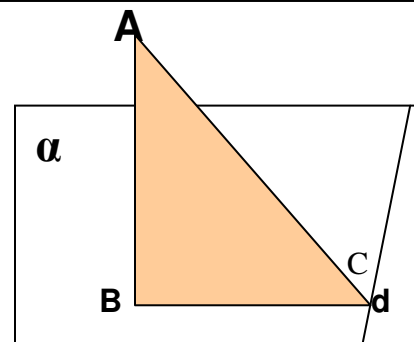
Atunci oricare ar fi dreapta  $d$  care trece prin  $A$  rezulta ca dreapta  $d$  nu este  $\perp \alpha$



**Tr.26** Teorema celor trei perpendiculare si reciprocele ei:

(Tr.3 $\perp$ ) Daca  $AB \perp \alpha$  si  $BC \perp d$ , atunci  $AC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$ ,  $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$ .

Daca  $AB \perp \alpha$  si  $d \subset \alpha$  atunci  $AB \perp d$  deci  $d \perp BC$  (ip) si  $d \perp AB$  rezulta ca  $d \perp (ABC)$  si cum  $AC \subset (ABC)$ , rezulta  $d \perp AC$ .



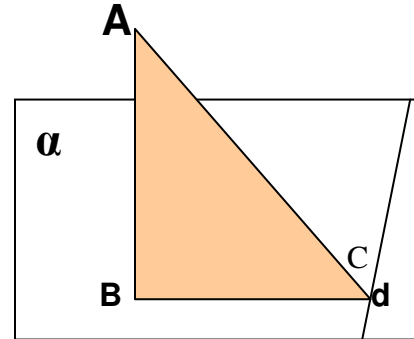
**Ex.10.** Fie  $AB \perp \alpha$  si  $BC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$ ,  $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$ . Daca  $AB=4$ ,  $BC=3$  calculati distanta de la  $A$  la dreapta  $d$ .

**Ex.11.** Fie  $AB \perp \alpha$  si  $BC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$ ,  $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$ . Daca  $AB=8$ ,  $AC=10$  calculati  $BC$  si distanta de la  $A$  la dreapta  $d$ .

**Ex.12.** Fie  $AB \perp \alpha$  si  $BC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$ ,  $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$ . Daca distanta de la  $A$  la  $d$  este 13 si distanta de la  $A$  la planul  $\alpha$  este 12 calculati distanta de la  $B$  la  $d$ .

**Tr.27. (R1Tr.3 $\perp$ )**Daca  $AB \perp \alpha$  si  $AC \perp d$ , atunci  $BC \perp d$  , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$ .

Daca  $AB \perp \alpha$  si  $d \subset \alpha$  atunci  $AB \perp d$  deci  $d \perp AC$ (ip) si  $d \perp AB$  rezulta ca  $d \perp (ABC)$  si cum  $BC \subset (ABC)$ , rezulta  $d \perp BC$ .



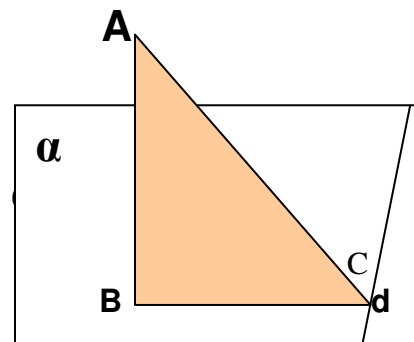
**Ex.13.** Fie  $AB \perp \alpha$  si  $AC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$  . Daca  $AB=11$ ,  $AC=3$  calculati distanta de la B la dreapta d.

**Ex.14.** Fie  $AB \perp \alpha$  si  $AC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$  . Daca  $AC=28$ ,  $AB=10$  calculati distanta de la B la dreapta d.

**Ex.15.** Fie  $AB \perp \alpha$  si  $AC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$  . Daca distanta de la A la d este 30 si distanta de la A la planul  $\alpha$  este 24 calculati distanta de la B la d.

**Tr.28. (R2Tr.3 $\perp$ )**Daca  $AB \perp BC$  si  $BC \perp d$ ,  $AC \perp d$  , atunci  $AB \perp \alpha$  unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$ .

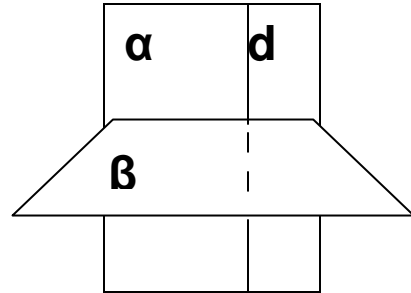
Daca  $d \perp BC$  si  $d \subset \alpha$  si  $AC \perp d$  deci  $d \perp (ABC)$  rezulta  $d \perp AB$  rezulta  $AB \perp \alpha$  si  $AB \perp d$  si  $\alpha = (d; BC)$ , rezulta  $AB \perp \alpha$ .



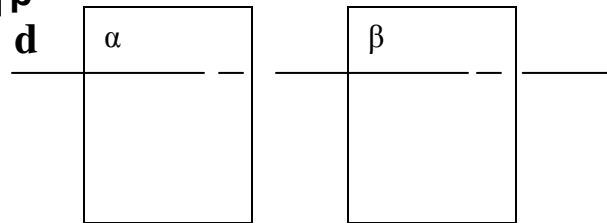
**Ex.16.** Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic in B si  $BC \perp d$  si  $AC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $A \notin \alpha$  . Daca  $AB=4$ ,  $BC=3$  calculati distanta de la A la  $\alpha$  si distanta de la A la d.

**Ex.17.** Fie  $AB \perp BC$ ,  $AC=4$ ,  $CE=3$ ,  $AE=5$  si  $BC \perp d$ , unde  $d \subset \alpha$ ,  $C \in d$   $B \in \alpha$ ,  $E \in d$   $A \notin \alpha$ .Daca  $AB=2$  calculati distanta de la B la dreapta d si distanta de la A la  $\alpha$ .

**Tr.29. Daca o dreapta este perpendiculara pe un plan atunci orice plan care contine dreapta data este perpendicular pe planul dat.  
 Daca  $d \perp \beta$  si  $d \subset \alpha$  atunci  $\alpha \perp \beta$**

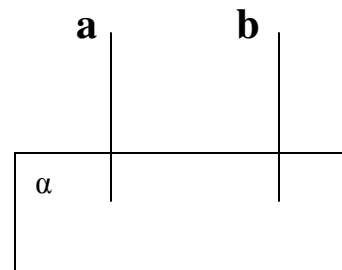


**Tr.30. Doua plane perpendiculare pe aceeasi dreapta sunt paralele.  
 Daca  $d \perp \alpha$  si  $d \perp \beta$  atunci  $\alpha \parallel \beta$**



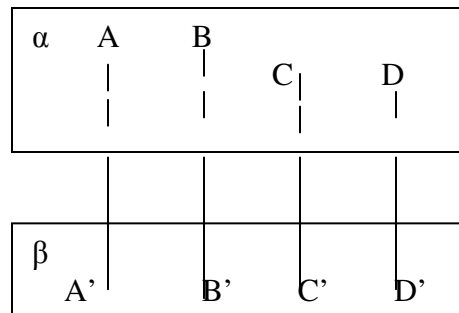
**Tr.31. Doua drepte perpendiculare pe acelasi plan sunt paralele.**

**Daca  $a \perp \alpha$  si  $b \perp \alpha$  atunci  $a \parallel b$**



**Tr.32. Distanța dintre două plane paralele este constantă.**

**Daca  $\alpha \parallel \beta$ ,  $AA' \perp \alpha$  deci si  $AA' \perp \beta$   
 $BB' \perp \alpha$  deci si  $BB' \perp \beta$   
 $CC' \perp \alpha$  deci si  $CC' \perp \beta$   
 $DD' \perp \alpha$  deci si  $DD' \perp \beta$   
 atunci  $AA' = BB' = CC' = DD'$**



**Ex.18.** Fie  $A \in \alpha$  si  $PA \perp \alpha$ ,  $P \notin \alpha$  si  $PA=12$ ,  $d \subset \alpha$  si  $AB \perp d$ ,  $AB=5$ . Calculati distanta de la P la dreapta d.

**Ex.19.** Fie  $\Delta ABC$  dreptunghic in B si catetele  $AB=3$ ,  $BC=4$  astfel incit  $BC \subset \alpha$ ,  $d \subset \alpha$  si  $d \perp (ABC)$ , se cere distanta de la A la dreapta d si distanta de la A la planul  $\alpha$ .

**Ex.20.** Fie  $\Delta ABC$  dreptunghic in A,  $\Delta ABD$  dreptunghic in D, iar  $\Delta DAC$  dreptunghic in A si  $AB=10$ ,  $BD=6$  si  $CD=12$ . Calculati distanta de la C la planul (BAD) si distanta de la C la BD.

**Ex.21.** Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare si  $\Delta ACB$  dreptunghic in C,  $\Delta ACD$  dreptunghic in C, iar CM mediana in  $\Delta BCD$ . Stiind ca  $AD=AB=12$ ,  $BC=4\sqrt{5}$ ,  $CM=6$ , se cere distanta de la C la planul (BAD) si distanta de la A la BD.

**Ex.22.** Fie  $\Delta ABC$  dreptunghic in B,  $\Delta ABD$  dreptunghic in B, iar  $\Delta DAC$  dreptunghic in A si  $AD=8$ ,  $AC=6$  si masura unghiului dintre planele (BCD) si (ACD) este de  $60^\circ$ . Calculati distanta de la A la planul (BCD) si distanta de la B la (ACD).

**Ex.23.** Fie ABCD un tetraedru regulat,  $AB=8$ , iar O este intersectia medianelor  $\Delta DCB$ . Calculati aria totala si volumul tetraedrului si distanta de la O la planul (ABC).

**Ex.24.** Fie VABCD o piramida patrulatera regulata,  $VA=12$  si  $AB=8\sqrt{2}$ . Calculati aria totala si volumul piramidei si distanta de la  $O=AC \cap BD$ , la planul (VMN), unde M este mijlocul lui AD, iar N este mijlocul lui CD.

**Ex.25.** Fie VABCDEF o piramida hexagonala regulata cu latura bazei,  $AB=10$  si  $VA=20$ . Calculati aria totala si volumul piramidei si distanta de la C la planul (VAF).

**Ex.26.** Se da cubul ABCDA'B'C'D' cu latura bazei,  $AB=8$ . Calculati aria totala si volumul piramidei B'ABC si distanta de la B la planul (B'AC).

**Ex.27.** Fie VABCD o piramida patrulatera regulata,  $AB=8\sqrt{2}$ , iar unghiul dintre VA si planul (ACD) cu masura de  $60^\circ$ . Sectionam piramida cu un plan paralel cu planul (ABC) la  $1/3$  de virf. Calculati aria totala si volumul corpului care ramine dupa ce indepartam piramida mica formata prin sectionare.

**Ex.28.** Fie ABCD un tetraedru regulat ,  $AB=10$ , iar O este intersectia medianelor  $\triangle DCB$  si  $AO=12$ . Calculati distanta de la A la BC si distanta de la mijlocul lui [AO] la BC.

**Ex.29.** Fie VABC o piramida triunghiulara cu baza  $\triangle ABC$ , triunghi echilateral, avind aria bazei egala cu  $15\sqrt{3}/2$  si  $VA \perp (ABC)$ , iar  $VA=12$ . Calculati distanta de la V la BC.

**Ex.30.** Se da cubul ABCDA'B'C'D' cu latura bazei,  $AB=24$ . Calculati aria totala si volumul piramidei O'ABC, unde  $O'=A'C' \cap D'B'$  si distanta de la A' la BD si distanta de la  $O=BC' \cap CB'$  la AD.

**Ex.31.** Fie ABCD un romb cu latura de 12 si unghiul ascutit de  $60^\circ$ , iar  $P \notin (ABC)$  astfel incit  $PA=6$  si  $PO=12$ . Se cere distanta de la P la PLANUL (BCD) si distanta de la P la CD. Aflati unghiul dintre planele (PBD) si (BCD).

**Ex.32.** Fie VABC o piramida triunghiulara regulata cu latura bazei de 15 si unghiul dintre VA si planul bazei (ABC) de  $30^\circ$ . Sectionam piramida cu un plan paralel cu baza, planul (ABC), si la jumatatea distantei dintre V si planul (ABC). Calculati aria totala si volumul trunchiului de piramida format.

**Ex.33.** Fie ABCD un patrat cu latura de 8. Calculati perimetrul, aria si diagonala patratului. Daca ridicam, din unul din virfurile patratului, o perpendiculara VA pe planul patratului cu lungimea de 12, se cere sa calculati distantele din virful perpendicularei V, la laturile si diagonalele patratului.

**Ex.34.** Se da cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de 10. Calculati masura unghiului dintre planele (A'B'C') si (D'AC).

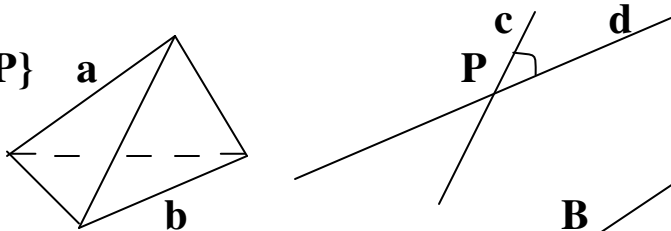
**Ex.35.** Se da triunghiul echilateral ABC cu latura de 4. Se cere raza cercului circumscris triunghiului, raza cercului inscris in triunghi si aria triunghiului. Fie  $VA \perp (ABC)$ ,  $VA=20$ . Calculati distanta de la V la BC.

**Ex.36.** Se da triunghiul oarecare ABC. Aratati ca oricare doua virfuri ale triunghiului sunt egal departate de mediana care porneste din cel de-al treilea virf al triunghiului. Fie AM, mediana si  $VA \perp (ABC)$ , aratati ca volumul piramidei VABM este egal cu volumul piramidei VACM oricare ar fi punctul V in spatiu si in afara planului (ABC).

#### 4. Unghiul a doua drepte in spatiu. Unghiul a doua plane

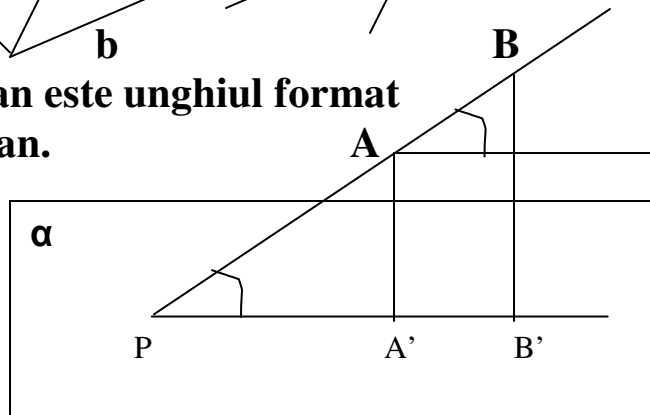
1. Unghiul a doua drepte oarecare din spatiu (nu au nici un punct comun) este egal cu unghiul a doua paralele cu dreptele date si care sunt si concurente.

$a \cap b = \emptyset$ ,  $c \parallel a$  si  $d \parallel b$ ,  $c \cap d = \{P\}$   
 $\angle(a; b) = \angle(c; d)$



2. Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul format de dreapta cu proiectia ei pe plan.

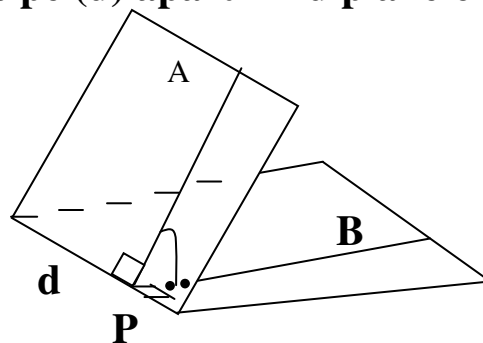
$AA' \perp \alpha$  si  $BB' \perp \alpha$ ,  $AB \cap \alpha = \{P\}$   
 $\angle(AB, \alpha) = \angle APA'$



3. Unghiul dintre doua plane care au o dreapta (d) in comun este unghiul format de doua perpendiculare pe (d) apartinand planelor, duse in acelasi punct de pe dreapta d.

Fie  $AP \perp d$  si  $BP \perp d$

$\angle APB$  este unghiul dintre plane



4. Unghiul diedru este unghiul format de doua semiplane determinate de dreapta comuna planelor. Dreapta comuna o vom numi muchia diedrului (dreapta d de mai sus).

Unghiul plan al diedrului sau unghiul plan corespunzator diedrului este unghiul format de doua semidrepte avind originea comuna pe muchia diedrului, fiecare fiind dusa in unul din cele doua semiplane si fiind perpendiculare pe muchie ( $\angle APB$  de mai sus).

## 5. Poliedre. Corpuri rotunde. Arii si volume.

### 1. Tetraedrul

Patru puncte necoplanare formeaza un corp pe care-l numim tetraedru.

Inaltimea tetraedrului este perpendiculara dintr-unul din virfuri pe fata opusa.

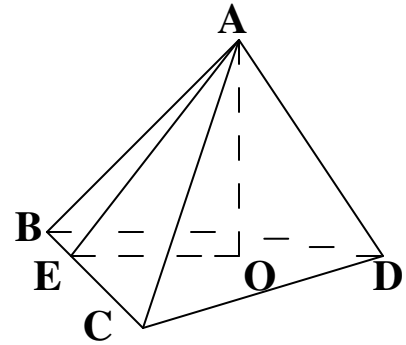
Aria totala a tetraedrului este suma ariilor fetelor tetraedrului.

Volumul tetraedrului este egal cu aria unei fete inmultita cu o treime din inaltimea corespunzatoare fetei.

Fie  $AO \perp (BCD)$   $OE \perp BC$ , rezulta cu T3  $\perp$  ca  $AE \perp BC$ , deci inaltimea tetraedrului este  $AO$ .

$$A_t = A_{(\Delta ABC)} + A_{(\Delta ACD)} + A_{(\Delta ABD)} + A_{(\Delta BCD)},$$

$$\text{Volumul tetraedrului este } V = A_{(\Delta BCD)} \cdot AO/3 = \dots$$



### 1. Tetraedrul regulat

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numeste tetraedru regulat. Deci  $\Delta ABC$ ,  $\Delta ACD$ ,  $\Delta ADB$ ,  $\Delta BCD$  sunt toate, triunghiuri echilaterale congruente, deci  $AB=AC=AD=BC=CD=DB$ .

Toate fetele sunt triunghiuri echilaterale.

Inaltimea tetraedrului regulat cade in centrul fetei opuse, care este la intersectia inaltimilor fetei ; sunt 4 inaltimi congruente.

Fie  $AO \perp (BCD)$   $OE \perp BC$ , rezulta cu T3  $\perp$  ca  $AE \perp BC$ , deci inaltimea tetraedrului este  $AO$ .

Dar  $\Delta ABC$ , este triunghi echilateral deci  $AE$  este si mediana , adica  $E$  este mijlocul lui  $BC$ , insa si  $\Delta BCD$  este triunghi echilateral, deci  $OE$  este mediatoare si deci este si inaltime rezulta ca  $OE$  trece prin  $D$ , deci  $O$  este pe inaltimea din  $D$  a  $\Delta BCD$ , si analog este si pe celelalte doua inaltimi ale  $\Delta BCD$ . Stim , de asemenea ca  $O$  este la  $2/3$  de virf si la  $1/3$  de baza  $\Delta BCD$ , adica  $OD=2DE/3$ , iar  $OE=DE/3$ , etc...

Aria totala a tetraedrului este de patru ori aria unei fete a tetraedrului. Volumul tetraedrului este egal cu aria unei fete inmultita cu o treime din inaltimea corespunzatoare fetei.

Notam cu  $l_3$ =latura  $\Delta$  echilateral,  $a_3$ =apotema  $\Delta$  echilateral,  $R$ =raza cercului circumscris  $\Delta$  echilateral,  $a_3 = l_3\sqrt{3}/6$ ,  $AO = l_3\sqrt{6}/3$ ,  $AE = l_3\sqrt{3}/2$ ,  $A_{bazei} = l_3^2\sqrt{3}/4$ ,  $A_{lat} = 3 l_3^2\sqrt{3}/4$ ,  $A_t = 4A_{(\Delta ABC)} = l_3^2\sqrt{3}$ ,

$$\text{Volumul tetraedrului este } V = A_{(\Delta BCD)} \cdot AO/3 = l_3^3\sqrt{2}/12$$

# 1. Prisma

Daca bazele sunt doua poligoane paralele, iar muchiile laterale sunt paralele si trec prin virfurile poligoanelor de la baza atunci

ele formeaza un corp pe care-l numim prisma.

Inaltimea prisme este perpendiculara

dintr-unul din virfurile unei baze pe baza opusa.

$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ , fie  $D'O \perp (ABC)$ ,  $OE \perp AD$  rezulta  $(T3 \perp)$

$D'E \perp AD$ ,  $h = D'O =$  inaltimea prisme (distanța dintre baze).

Aria laterala a prisme este suma ariilor fetelor

laterale ale prisme. De exemplu aria fetei  $AA'DD'$  este egala cu

$AD \cdot D'E$ , iar  $A_l = A_{AA'DD'} + A_{AA'BB'} + A_{BB'CC'} + A_{CC'DD'} = (AB + BC + CD + \dots)h$

Aria totala a prisme este suma dintre aria laterala a prisme si ariile

bazelor.  $A_t = A_l + A_{ABCD} + A_{A'B'C'D'} = P_{bazei}h + A_{ABCD} + A_{A'B'C'D'}$

Volumul prisme este egal cu aria unei baze inmultita cu inaltimea

prisme.  $V = A_b \cdot h = A_{ABCD} \cdot D'O = A_{ABCD} \cdot h$

O prisma dreapta este o prisma in care orice muchie laterala este perpendiculara pe baze.

$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ , si  $AA' \perp (ABC)$ ,  $AA' \perp (A'B'C')$ ...

Paralelipipedul este o prisma cu bazele

paralelograme.  $ABCD$  si  $A'B'C'D'$  = paralelograme

Paralelipiped drept este un paralelipiped cu

fetele laterale dreptunghiuri (bazele sunt totusi paralelograme).

$ABCD$  si  $A'B'C'D'$  = paralelograme

Iar  $AA'DD'$ ,  $AA'BB'$ ,  $BB'CC'$ ,  $CC'DD'$  sunt dreptunghiuri

Paralelipiped dreptunghic este un paralelipiped cu toate fetele dreptunghiuri (fetele laterale si bazele sunt dreptunghiuri).

$ABCD$  si  $A'B'C'D'$  = dreptunghiuri

Iar  $AA'DD'$ ,  $AA'BB'$ ,  $BB'CC'$ ,  $CC'DD'$  sunt dreptunghiuri (L)

Aria totala a paralelipipedului dreptunghic  $= A_t = 2(Ll + lh + Lh)$ ,

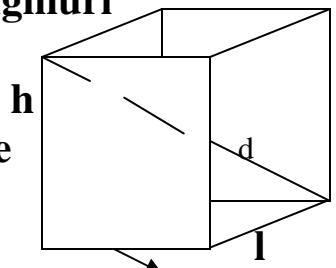
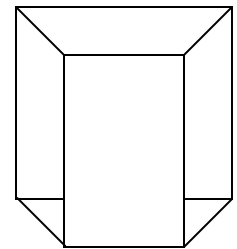
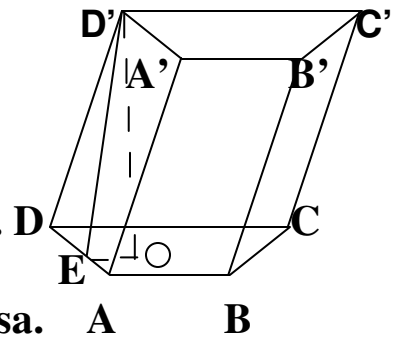
diagonala paralelipipedului dreptunghic = d si  $d^2 = L^2 + l^2 + h^2$

volumul  $= V = A_{bazei} \cdot h = Ll h =$  produsul dimensiunilor

Cubul are toate fetele patrute: volumul  $V = l^3$ ,  $A_t = 6l^2$ , diagonala  $d = l\sqrt{3}$

O prisma triunghiulara este o prisma in care bazele sunt triunghiuri.

O prisma hexagonala este o prisma in care bazele sunt hexagoane.



## 1.Piramida

Patru puncte necoplanare formeaza un corp pe care-l numim piramida.

Virful=V

Baza=poligonul opus lui V,  $\Delta ABC$

Fetele laterale= $\Delta VAB, \Delta VAC, \Delta VBC, \dots$

Muchiile laterale= $VA, VB, VC, \dots$

Muchiile de la baza= $AB, BC, CD, \dots$

Muchiile piramidei=laterale si ale bazei

Apotema piramidei=inaltimile fetelor laterale,  $VE$

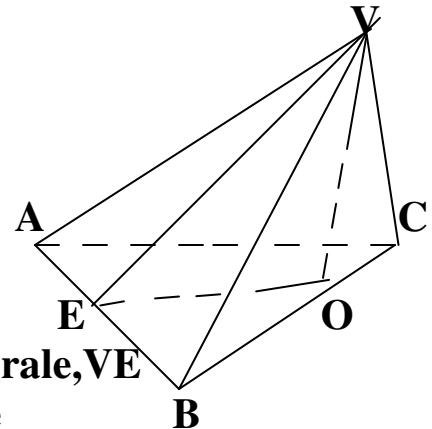
Aria laterala=suma ariilor fetelor laterale

Ariile bazelor=aria poligoanului de la baza

Inaltimea piramidei este perpendiculara dintr-unul din virfuri pe fata opusa.  $VO \perp (ABC)$

Aria totala a piramidei este suma ariilor fetelor piramidei.

Volumul piramidei este egal cu aria unei fete inmultita cu o treime din inaltimea corespunzatoare fetei.  $V=A_{ABC} \cdot VO/3$



## 1.Piramida regulata

O piramida cu muchii laterale congruente si avind baza un poligon regulat se numeste piramida poligonala regulata.

Toate fetele sunt triunghiuri isoscele ( $VAB, VBC, \dots$ ).

Inaltimea piramidei regulate cade in centrul bazei, care este la intersectia inaltimilor (=mediane, mediatoare, bisectoare) .

Aria totala a piramidei este suma ariilor fetelor laterale, care sunt de altfel egale intre ele, si aria bazei (un poligon regulat).

Volumul piramidei este egal cu aria bazei inmultita cu o treime din inaltime.  $V=A_b \cdot VO/3$  ,  $A_b$ =aria bazei

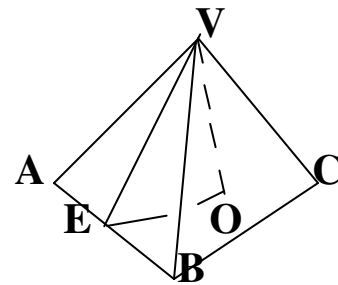
Deci  $\Delta VAB, \Delta VBC, \Delta VCD, \dots$

sunt triunghiuri isoscele congruente.

Baza este poligon regulat:

triunghi echilateral, patrat,

hexagon regulat, etc...



De exemplu daca baza este triunghi echilateral,  $\Delta ABC$  si  $VO \perp (ABC)$   $OE \perp AB$ , rezulta cu  $T3 \perp$  ca  $VE \perp AB$ , deci inaltimea este  $VO$ . Dar  $\Delta VAB$ , este triunghi isoscel deci  $VE$  este si mediana , adica  $E$  este mijlocul lui  $AB$ , insa  $\Delta ABC$  este triunghi echilateral, deci  $OE$  este mediatoare si deci este si inaltime rezulta ca  $OE$  trece prin  $C$ , deci  $O$  este pe inaltimea din  $C$  a  $\Delta ABC$ , si analog este si pe celelalte doua inaltime ale  $\Delta ABC$ . Stim , de asemenea ca  $O$  este la  $2/3$  de virf si la  $1/3$  de baza  $\Delta ABC$ , adica  $R=CO=2CE/3$ , iar  $OE=CE/3$ , etc...

Volumul piramidei este  $V = A_{(\Delta ABC)} \cdot VO/3$  , aria laterala  $A_{lat} =$ suma ariilor fetelor laterale care sunt triunghiuri isoscele congruente, deci este semi-perimetrul bazei inmultit cu apotema piramidei(inaltimea fetei)= $P_{bazei} \cdot a_p/2$ . Aria totala =  $A_t = A_{lat} + A_{(\Delta ABC)}$  .

**Ex.37.** Calculati aria laterala a unei piramide triunghiulare regulate cu inaltimea de 4, iar apotema de 12.

**Ex.38.** Calculati volumul unei piramide patrulatere regulate care are aria laterala 144, iar aria totala 169.

**Ex.39.** Calculati volumul si aria laterala a unei piramide triunghiulare regulate cu latura bazei de 24, iar unghiul dintre muchia laterala si latura bazei de  $45^0$ .

**Ex.40.** Fie  $VABCD$  o piramida patrulatera regulata cu apotema de 6 si masura unghiului dintre muchii si diagonalele alaturate de  $45^0$ . Calculati tangenta unghiului dintre fetele  $VAB$  si  $VBC$ ,  $VAB$  si  $VCD$ , precum si unghiul dintre  $VA$  si dreapta  $d=(VAD) \cap (VBC)$ .

**Ex.41.** Fie  $VABC$  o piramida triunghiulara regulata. Avind aria laterala egala cu 256. Prin mijlocul inaltimii ducem un plan paralel cu  $(VAB)$  . Calculati aria sectiunii formate.

**Ex.42.** Fie  $VABCD$  o piramida regulata cu baza patrat cu latura de 20, iar unghiul dintre o mucie laterala si latura bazei alaturata ei de  $45^0$ .

Aflati aria si volumul piramidei si distanta de la punctul de intersectie a diagonalelor patratului  $ABCD$ , la  $(VAB)$ .

# 1. Trunchiul de piramida

Virful piramidei din care provine trunchiul = V

Bazele =  $\Delta ABC$ ,  $\Delta A'B'C'$  sau...

Fetele laterale = trapeze  $A'B'AB$ ,  $B'C'BC$ ...

Muchiile laterale:  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ...

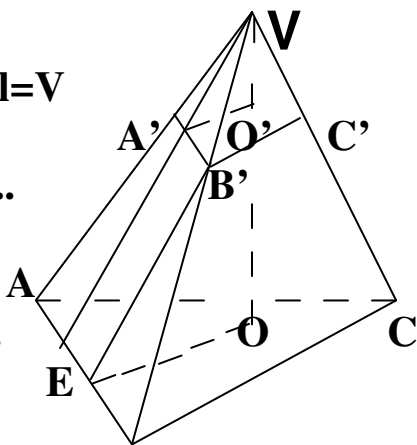
Muchiile de la baza:  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ,  $A'B'$ , ...

Muchiile trunchiului:  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $AB$ ,  $A'B'$ , ...

Apotema trunchiului:  $B'E \perp AB$ , ...

Aria laterala = aria trapezelor  $AA'BB'$ , ...

Ariile bazelor = aria poligoanelor de la baza... B



Inaltimea trunchiului este perpendiculara dintr-unul din virfuri pe baza ( $OO'$ ),  $VO$  este inaltimea piramidei mari din care provine trunchiul, iar  $VO'$  inaltimea piramidei mici.

Aria totala a trunchiului este suma ariilor fetelor trunchiului, fetele laterale (trapeze) si ariile bazelor.  $A_t = (P_{\text{Bazei mari}} + P_{\text{bazei mici}}) A_{\text{potema tr.}} / 2$   
 $A_t = A_l + B + b$ ,  $P_{\text{Bazei mari}}$  = perimetrul bazei mari,  $P_{\text{bazei mici}}$  = perimetrul bazei mici,  $A_{\text{potema tr.}}$  = apotema trunchiului

Volumul trunchiului este egal cu o treime din inaltimea inmultita cu suma dintre ariile bazelor si radacina patrata din produsul lor.

$V = (B + b + \sqrt{Bb})h/3$ , unde  $B$  = aria bazei mari,  $b$  = aria bazei mici,  $h = OO'$

Raportul volumelor celor doua piramide formate prin sectionarea (taierea) piramidei mari ( $VABC$ ) cu planul ( $A'B'C'$ ) paralel cu baza ( $ABC$ ) este egal cu cubul raportului de asemanare.

$V' = A_{\Delta A'B'C'} \cdot VO'/3$ , iar  $V = A_{\Delta ABC} \cdot VO/3$  deci raportul celor doua volume este:  $V'/V = A_{\Delta A'B'C'} \cdot VO' / A_{\Delta ABC} \cdot VO$ , dar  $A_{\Delta A'B'C'} = A'B' \cdot i'/2$   
 $A_{\Delta ABC} = AB \cdot i/2$ , deci raportul lor este  $A_{\Delta A'B'C'} / A_{\Delta ABC} = A'B' \cdot i' / AB \cdot i$ , dar din asemanarea triunghiurilor  $\Delta VA'B' \sim \Delta VAB$ ,  $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB$ ,  $\Delta VO'M' \sim \Delta VOM$ , etc... obtinem:

$A'B'/AB = VO'/VO = i'/i$ , deci raportul ariilor este patrata raportului de asemanare:  $A_{\Delta A'B'C'} / A_{\Delta ABC} = A'B' \cdot i' / AB \cdot i = (i'/i)^2$ , iar raportul volumelor:  $V'/V = (h'/h)^3$ .

Se vede ca volumul trunchiului este egal cu diferenta volumelor celor doua piramide:  $V_t = V - V'$ , ceea ce poate usura calculele.

Ex.1. Fie  $VABCD$  o piramida patrulatera regulata cu latura de 12, iar unghiul dintre o fata laterala si baza de  $60^\circ$ . Sectionam piramida cu un plan ( $A'B'C'D'$ ) paralel cu baza la  $1/3$  de virf. Se cere aria si volumul trunchiului format si distanta de la  $O$  la planul ( $VAB$ ) si



## 1. Corpuri rotunde

Corpurile rotunde sunt corpuri de rotatie, intuitiv ele sunt generate de puncte sau segmente/drepte care se misca. De exemplu o sfera o putem imagina ca fiind generata de un punct care se misca in spatiu la o distanta fixa de un punct fix dat.

Cilindrul ia nastere prin miscarea unui segment in jurul unui punct fix la distanta constanta de acest punct fix, segmentul fiind mereu paralel cu o directie data si fixa.

Conul ia nastere prin miscarea capatului unui segment in jurul unui punct fix, la distanta data, constanta, segmentul avind celalalt capat fix.

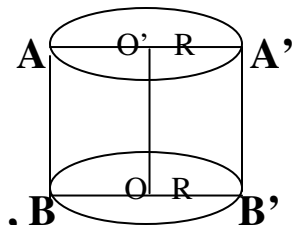
### 1. Cilindrul circular drept

Cilindrul circular drept ia nastere prin miscarea unui segment in jurul unui punct fix la distanta constanta de acest punct fix si intre doua plane paralele pe care segmentul este perpendicular.

Astfel bazele sunt doua cercuri cu aceeasi raza, paralele, iar segmentul care genereaza cilindrul este mereu paralel cu o directie fixa, data.

Se dau, segmentul  $[AB]$  si punctul fix  $O$  si dreapta  $d$  si o lungime fixa  $R$  si doua plane paralele,  $\alpha \parallel \beta$ ,

iar  $A \in \alpha, B \in \beta$ . Daca  $[AB]$  se roteste in jurul lui  $O$ , la distanta  $R$  de  $O$  astfel incit mereu  $AB \parallel d$  si  $AB \perp \alpha$ ,  $B$



$AB \perp \beta$  atunci  $[AB]$  genereaza un cilindru circular

drept. De aceea  $[AB]$  se numeste generatoarea cilindrului,  $R$  este raza celor doua cercuri care sunt numite bazele cilindrului. Se vede ca inaltimea cilindrului este egala cu generatoarea cilindrului, adica  $OO' = G = h = AB = A'B' = \dots$ , unde  $O$  si  $O'$  sunt centrele cercurilor de la baza cilindrului,  $OB = OB' = OA = OA' = R$ . Volumul cilindrului  $V = \pi R^2 G = \pi R^2 h$ , iar aria laterala (= aria dreptunghiului cu  $L = 2\pi R$  si  $l = G$  care este desfasurarea cilindrului)  $A_l = 2\pi R G$ , aria totala  $A_t = 2\pi R G + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R)$

**Ex.46.** Calculati volumul cilindrului circular drept care are generatoarea si raza direct proportionale cu numerele 5 si 12, iar diagonala sectiunii axiale face cu planul bazei un unghi de  $60^\circ$ .

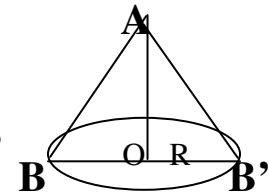
# 1. Conul circular drept

Conul ia nastere prin miscarea capatului unui segment in jurul unui punct fix, la distanta data, constanta de punctul fix, segmentul avind celalalt capat fix.

fixa, data.

Se dau, segmentul [AB] si punctul fix O si o lungime fixa R si planul  $\alpha$ ,

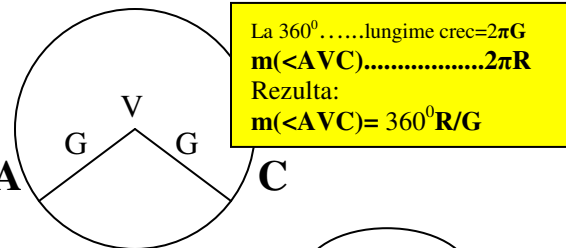
iar A=fix si  $O, B \in \alpha$ . Daca B se roteste in jurul lui O, la distanta R de O astfel incit B descrie un cerc si  $AO \perp \alpha$  atunci [AB] genereaza un con circular drept.



De aceea [AB] se numeste generatoarea conului, R este raza cercului care este baza conului. Se vede ca inaltimea conului, AO este cateta triunghiului dreptunghic AOB, in care generatoarea AB este ipotenuza, deci  $AB^2 = AO^2 + OB^2$ , adica  $G^2 = h^2 + R^2$ , unde generatoarea  $G = AB = AB' = \dots$ , inaltimea  $h = AO$  si raza  $R = Ob = OB'$ , O este centrul cercului de la baza conului. Triunghiul ABB' este un triunghi isoscel, dar poate fi si echilateral sau dreptunghic si isoscel.

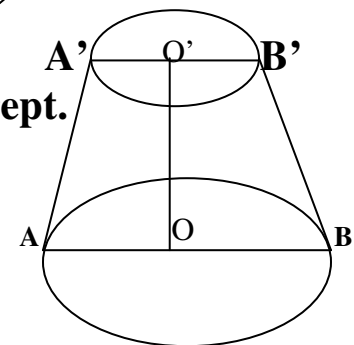
Volumul conului  $V = \pi R^2 h / 3$ , iar aria laterala  $A_l = \pi R G$ , aria totala  $A_t = \pi R G + \pi R^2 = \pi R(G + R)$ . Aria laterala = aria sectorului de cerc care se obtine prin desfasurarea conului:

lungimea arcului mic AC este egala cu lungimea cercului de la baza conului =  $2\pi R$ , iar raza cercului mare A cu centrul in V este G.



Sectionind un con cu un plan paralel cu cercul de la baza se obtine un trunchi de con circular drept.

Volumul trunchiului de con circular drept  $V = (\pi h / 3)(R^2 + r^2 + Rr)$ , iar aria laterala  $A_l = \pi G(R + r)$ , aria totala  $A_t = \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$  Unde  $G = AA' = BB'$ ,  $h = OO'$ ,  $r = A'O' = O'B'$   $R = OA = OB$ ,



Ca si la piramida raportul dintr volumul conului mic(V') care a fost indepartat prin sectionare pentru a obtine trunchiul de con si volumul conului mare din care provie conul este egal cu cubul raportului de asemanare, adica :

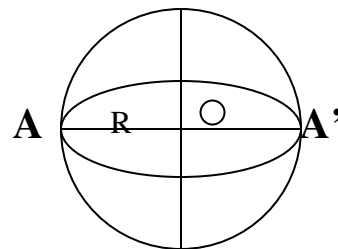
$V'/V = VO'/VO = VA'/VA = VB'/VB = \dots = r/R$ , pentru ca avem triunghiurile asemenea  $\Delta VO'A' \sim \Delta VOA$ .

# 1.Sfera

Sfera o putem imagina ca fiind generata de un punct care se misca in spatiu la o distanta constanta de un punct fix dat.

O=centrul sferei, este fix

OA=R, raza sferei



Volumul sferei  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ , iar aria(totala)  $A = 4\pi R^2$

Notam cu a latura unui cub si cu  $r_{sf.insrc}$  = raza sferei inscrisa in cub,  $r_{sf.insrc} = a/2$  si  $R_{sf.circ}$  = raza sferei circumscrise cubului :  $R_{sf.circ} = a\sqrt{3}/2$ .

Notam cu L, l, h laturile unui paralelipiped dreptunghic si cu  $R_{sf.circ}$  = raza sferei circumscrise paralelipipedului :  $R_{sf.circ} = a\sqrt{3}/2$ .

Notam cu a latura tetraedrului regulat si cu  $r_{sf.insrc}$  = raza sferei inscrise in acest tetraedru si  $R_{sf.circ}$  = raza sferei circumscrise tetraedrului :  $R_{sf.circ} = (\sqrt{L^2 + l^2 + h^2})/2$

Ex.47. Raza unei sfere este de 12. Calculati aria si volumul sferei.

Ex.48. Razele a trei sfere sunt 12; 18 si 24. Aflati aria sferei care are aria egala cu media aritmetica a celorlalte doua.

Ex.49. Aflati raza unei sfere daca aria si volumul ei sunt egale.

Ex.50. Raza unei sfere este 12. Aflati volumul unui cub circumscris sferei.

Ex.51. Raza unei sfere este 24. Aflati volumul unui cub in care este inscrisa sfera, care este astfel tangenta la toate fețele cubului inclusiv bazele.

Ex.52. Raza unei sfere este 36 si in ea inscriem un cub, astfel ca virfurile acestuia sunt pe sfera. Aflati volumul cubului.

Ex.53. Razele a trei sfere sunt direct proportionale cu 15; 28 si 48. Stim ca raza unei sfere este media aritmetica a celorlalte doua. Aflati volumul celor trei sfere.

Ex.54. Diagonala unui cub este 12. Aflati volumul celor trei sfere circumscrise cubului.

Ex.55. Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' si M,N,P,Q puncte pe laturile AA', BB', CC', DD' la 1/3 de baza, iar O=AC∩BD, O'=A'C'∩B'D', iar S=(MNP)∩OO'. Aflati O'S/O'O, C'S/SA si volumul sferei circumscrise paralelipipedului, stiind ca dimensiunile paralelipipedului sunt L=h√3, l=h, iar h=inaltimea paralelipipedului.