1.PUNCTUL.DREAPTA.PLANUL

1.Punctul A ▪ A ▪E=F P▪ Q▪ P≠Q

2.Dreapta d sau dreapta AB (d) A B

Semidreapta OA, notata [OA sau (OA, adica fara O

O A

3.Segmentul AB, notat [AB]
(AB),[AB),(AB]

A M B

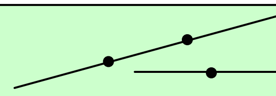
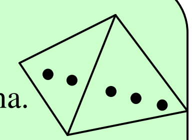
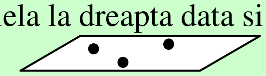
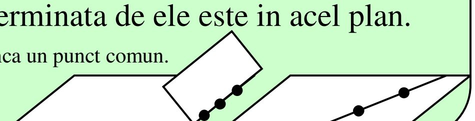
M este mijlocul lui [AB] daca MA=MB=AB/2 sau [MA]≡[MB](=AB/2)

4.Definitie : Orice multime nevida de puncte este o **figura geometrica**

Punctul, dreapta si planul sunt multimi de puncte, deci sunt figuri geometrice.

- M≠N **puncte distincte** sau **diferite** **M●** N● E=F●
- E=F **puncte identice** sau **confundate**

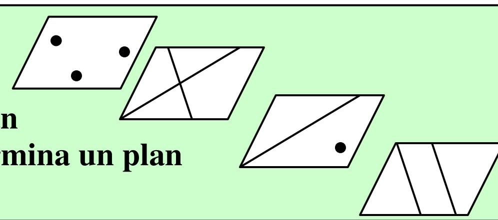
5.Axiomele geometriei in spatiu:

1.Prin doua puncte distincte trece o dreapta si numai una.


2.Printr-un punct exterior unei drepte trece o paralela la dreapta data si numai una.
3.Trei puncte necoliniare determina un plan.

4.Daca doua puncte sunt intr-un plan atunci si dreapta determinata de ele este in acel plan.
5.Daca doua plane au un punct comun atunci ele mai au cel putin inca un punct comun.
6.Exista patru puncte necoplanare.


Consecinta: Doua plane care au un punct comun au o dreapta; cu alte cuvinte, intersectia a doua plane care au un punct comun este o dreapta(si nu altceva`).

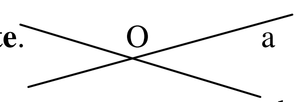
6.Determinarea planului:

-Trei puncte determina un plan
-Doua drepte concurente determina un plan
-O dreapta si un punct nesituat pe ea determina un plan
- Doua drepte paralele determina un plan



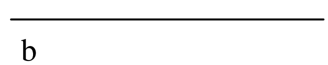
Notatii : planul se noteaza cu litere grecesti mici, sau cu 3 litere latine intre paranteze. α =(ABC)

Doua drepte care au un singur punct comun se numesc **drepte concurente**.



$a \cap b = \{O\}$; O este punctual de intersectie

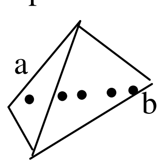
Doua drepte a si b din acelasi plan care nu au nici un punct comun se numesc **drepte paralele**
a ∥ b

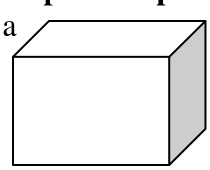


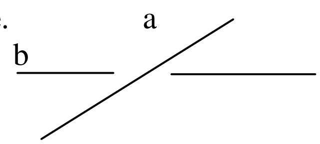
$a \cap b = \acute{\emptyset}$

Doua drepte nesituate in acelasi plan se numesc **drepte necoplanare**.

$a \cap b = \acute{\emptyset}$



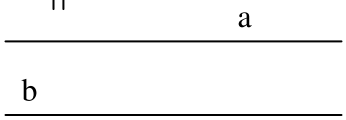




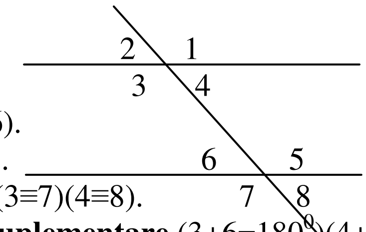
2.DREPTE PARALELE

Definitie. Doua drepte coplanare care nu au nici un punct comun sunt paralele.

scriem $a \parallel b$



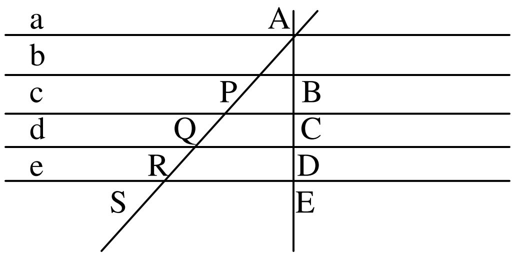
Axioma paralelelor: Printr-un punct exterior unei drepte putem construi doar o paralela la acea dreapta.



Tr.1.Doua drepte paralele formeaza cu o secanta :

1. **Unghiuri alterne interne congruente** (3≡5)(4≡6).
2. **Unghiuri alterne externe congruente** (2≡8)(1≡7).
3. **Unghiuri corespondente congruente** (2≡6)(1≡5)(3≡7)(4≡8).
4. **Unghiuri interne si de aceeasi parte a secantei suplementare.**($3+6=180^0$)($4+5=180^0$)
5. **Unghiuri externe si de aceeasi parte a secantei suplementare.**($2+7=180^0$)($1+8=180^0$)

Tr.2.Mai multe drepte paralele echidistante determina pe orice secanta segmente congruente.

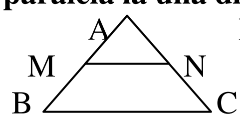


$a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e$ si [AB]≡[BC]≡[CD]≡[DE], rezulta [AP]≡[PQ]≡[QR]≡[RS]

Daca in locul dreptelor $\parallel$ luam plane $\parallel$ tr.ramine valabila.

Tr.3.Daca M este mijlocul laturii [AB], iar MN $\parallel$ BC, atunci N este mijlocul lui [AC].

Tr.4.Thales O paralela la una din laturile unui triunghi formeaza pe celelalte doua segmente proportionale.

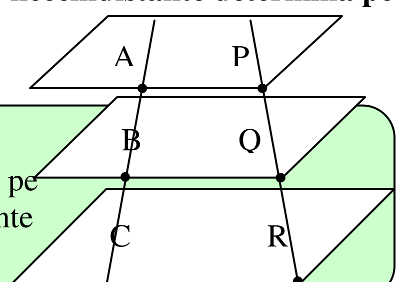


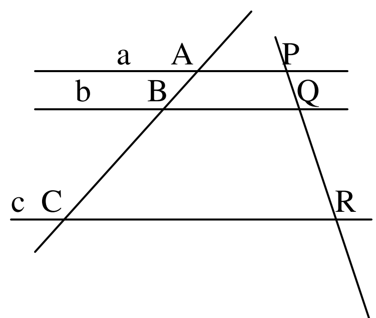
MN $\parallel$ BC rezulta AM/MB=AN/NC

Tr.5.Mai multe drepte paralele neechidistante determina pe doua secante segmente proportionale.

$a \parallel b \parallel c$ rezulta AB/BC≡PQ/QR

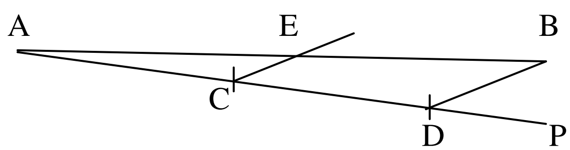
Tr.6.(Thales in spatiu)
Mai multe plane $\parallel$ determina pe 2 secante care le taie, segmente proportionale.





Tr.Cum impartim un segment in doua parti congruente.

-luam in compas o lungime oarecare
-construim dreapta oarecare AP
-cu compasul luam [AC] ≡ [CD] pe dr. AP
-unim D cu B
-ducem CE $\parallel$ DB
-conform tr.Thales 1=AC/CD=AE/EB, deci si AE=EB



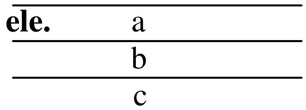
Tr.Cum impartim un segment dat in n parti congruente :

-ca mai sus, dar in loc sa luam pe AP, 2 segmente ≡ , luam n segmente ≡

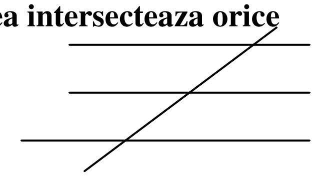
Tr.Linia mijlocie a triunghiului este paralela cu latura a treia si egala cu jumatate din ea.

-daca MN este linie mijlocie in ΔABC(M si N sunt mijloacele laturilor **ΔABC**) atunci MN $\parallel$ BC si MN=BC/2(vezi desenul de la tr.Thales).

Tr.6.Doua drepte paralele cu o a treia dreapta sunt paralele intre ele.
$a \parallel b$ si $b \parallel c$, atunci si $a \parallel c$

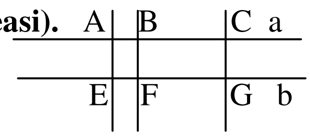


Tr.7.Daca dreapta a intersecteaza dreapta b intr-un punct, atunci ea intersecteaza orice paralela la dreapta b tot intr-un punct.

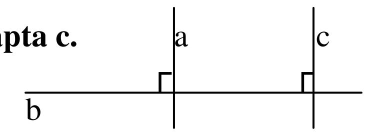


Tr.8. Doua unghiuri cu laturile paralele sunt congruente sau suplementare.
Tr.9. Daca dreapta a $\perp$ b , atunci ea este perpendiculara pe orice paralela la dreapta b.

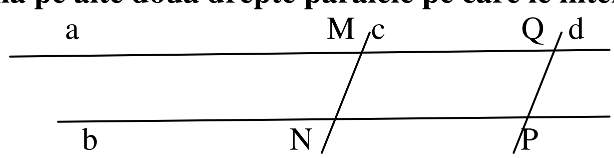
Tr.10.Distanta dintre doua drepte paralele este constanta(mereu aceeasi).
$AE \perp a$, $AE \perp b$, $BF \perp a$, $BF \perp b$, $CG \perp a$, $CG \perp b$
Concluzia : AE=BF=CG =...



Tr.11. Daca dreapta a $\perp$ b si c $\perp$ b, atunci a este paralela cu dreapta c.
$a \parallel c$



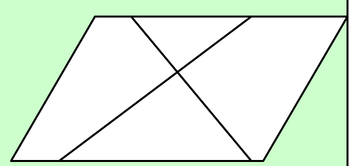
Tr.12.Doua drepte paralele determina pe alte doua drepte paralele pe care le intersecteaza segmente congruente.
$a \parallel b$ si $c \parallel d$, rezulta MN=PQ
MNPQ=paralelogram

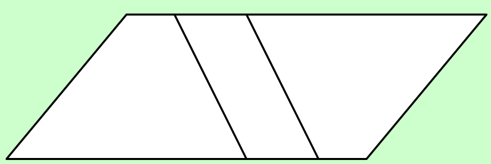


Pozitiile relative a doua drepte in spatiu:

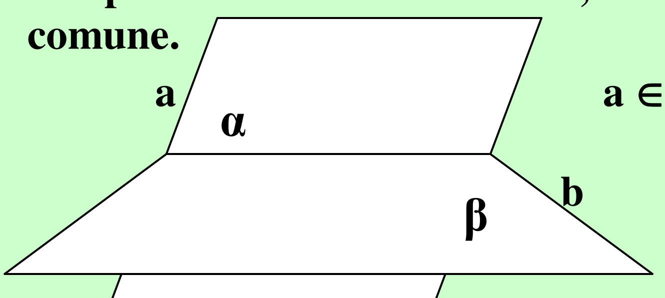
1.Doua drepte din spatiu pot fi coplanare:

1.Doua drepte distincte pot avea in comun un singur punct, in acest caz sunt si coplanare si se numesc drepte concurente.
2.Doua drepte coplanare care nu au nici un punct comun sunt paralele.

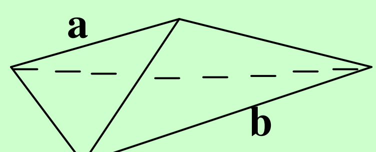




2.Doua drepte din spatiu pot fi necoplanare, adica nu sunt nici paralele si nici concurente, dar nici nu au puncte comune.



$a \in \alpha$ si $b \in \beta$, $a \cap b = \emptyset$

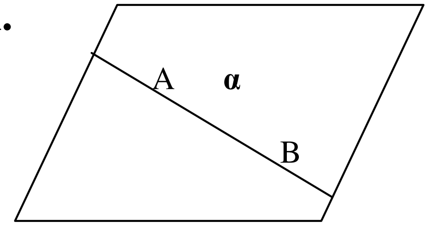


muchii opuse in tetraedru

3. Pozitiile relative ale unei drepte fata de un plan:

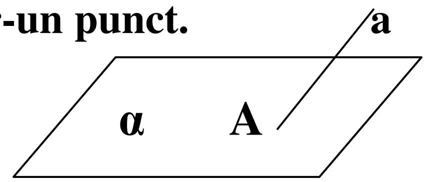
1.O dreapta poate avea doua puncte comune cu un plan ; in acest caz dreapta este inclusa/continuta in plan.

$A \in \alpha$ si $B \in \beta$, $AB \subset \alpha$



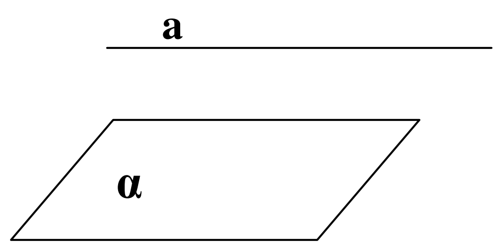
2.O dreapta poate avea un singur punct comun cu un plan ; in acest caz dreapta inteapa planul intr-un punct.

$A \in \alpha$, $A \in a$, $a \cap \alpha = \{A\}$



3.O dreapta poate avea nici un punct comun cu un plan ; in acest caz dreapta este paralela cu planul.

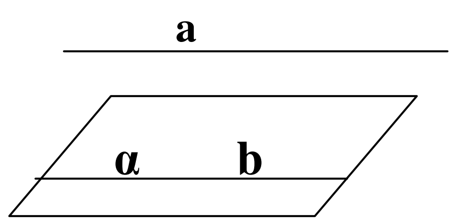
$a \parallel \alpha$, $a \cap \alpha = \emptyset$



Tr.13.O dreapta paralela cu o dreapta din plan este paralela cu planul.

$a \parallel b$, $a \cap \alpha = \emptyset$, deci $a \parallel \alpha$

$b \subset \alpha$



Ex.1. Un cub ABCDA'B'C'D' are prin definitie toate fetele patrate. Se cere sa desenati cubul si sa identificati, folosind notatiile indicate, drepte paralele cu plane.

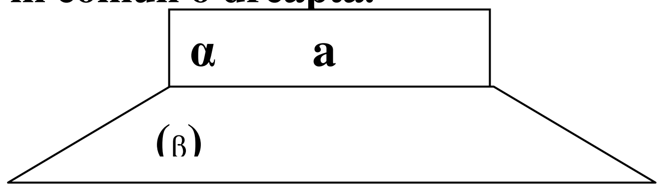
Ex.2. Fie ABCD, un tetraedru oarecare si M,N mijloacele laturilor AB si BC. Spuneti daca MN este paralela cu planul (BCD), dar cu planul (ACD) ?

Ex.3. Fie piramida VABCD, cu baza dreptunghiul ABCD si dreapta $a \parallel BC$. Dreapta a este paralela cu AD, dar cu (VAD) ?

4. Pozitiile relative a doua plane:

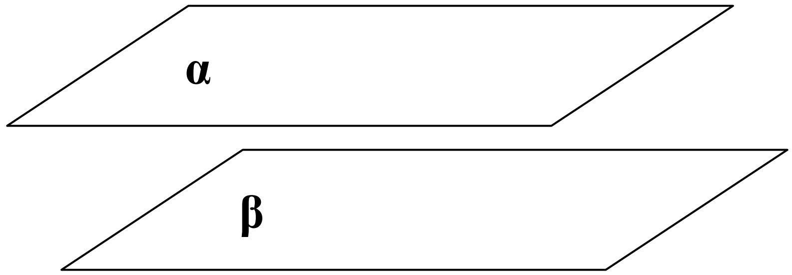
1.Doua plane distincte pot avea in comun o dreapta.

$\alpha \cap \beta = a$, $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$



2.Doua plane distincte pot fi paralele(nu au nici un punct comun).

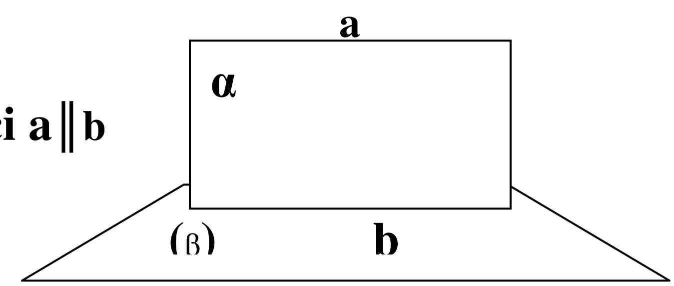
$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = \emptyset$



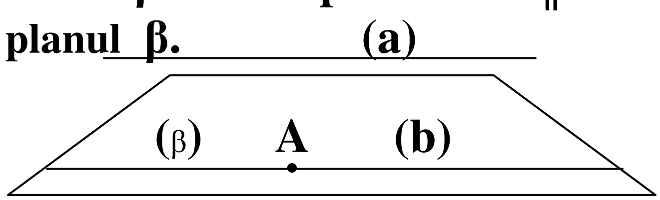
Tr.14.Daca o dreapta (d) este paralela cu un plan atunci orice plan care contine dreapta (d) si intersecteaza planul, o face dupa o dreapta paralela cu dreapta data (d).

Daca, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ atunci $a \parallel b$

$a \subset \alpha$



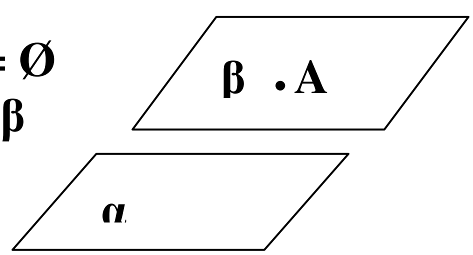
Tr.15. Daca, $a \parallel \beta$ si prin punctual $A \in \beta$ ducem paralela $b \parallel a$ atunci dreapta b este continuta in planul β.



Tr.16.Printr-un punct exterior unui plan putem duce un singur plan paralel cu planul dat.

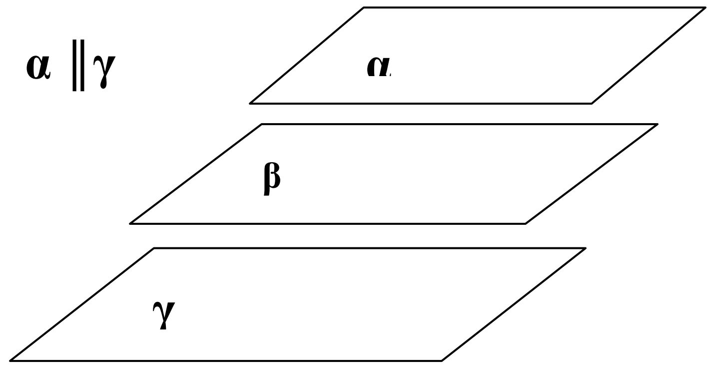
Fie $A \notin \alpha$ si $A \in \beta$ si $\beta \parallel \alpha$, $\alpha \cap \beta = \emptyset$

Oricare alt plan $\gamma \parallel \alpha$ coincide cu β daca $A \in \gamma$



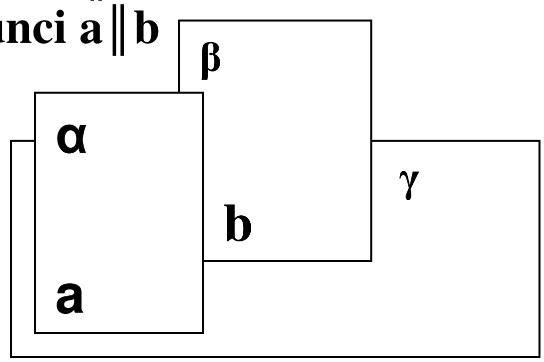
Tr.17.Doua plane distincte paralele cu un al treilea plan diferit de ele, sunt paralele intre ele.

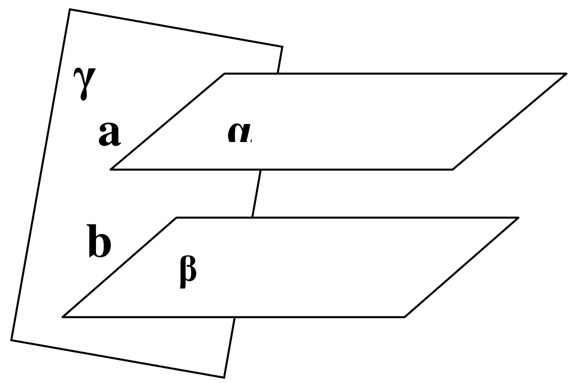
Fie $\alpha \parallel \beta$ si $\gamma \parallel \beta$ atunci $\alpha \parallel \gamma$



Tr.18.Doua plane paralele sunt taiate de un al treilea plan dupa drepte paralele.

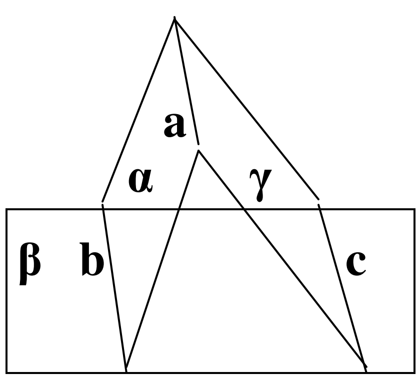
Daca $\alpha \parallel \beta$ si $\gamma \cap \beta = b$, $\gamma \cap \alpha = a$ atunci $a \parallel b$

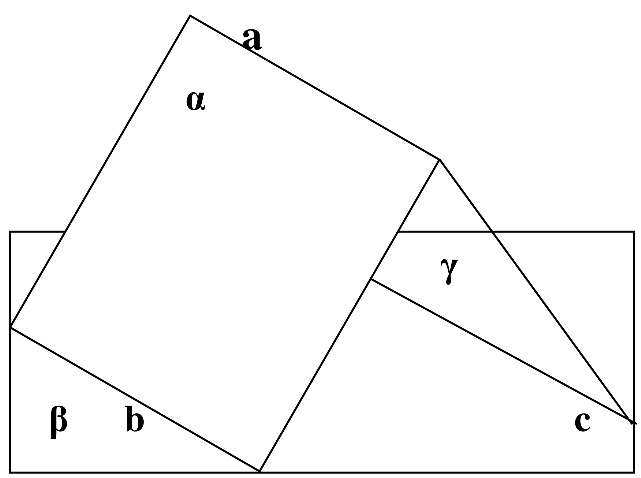




Tr.19.Daca trei plane distincte se intersecteaza doua cite doua dupa cite o dreapta, atunci cele trei drepte sunt paralele.
(Tr.acoperisului)

Daca $\alpha \cap \beta = b$, $\gamma \cap \alpha = a$
$\gamma \cap \beta = c$
atunci $a \parallel b \parallel c$

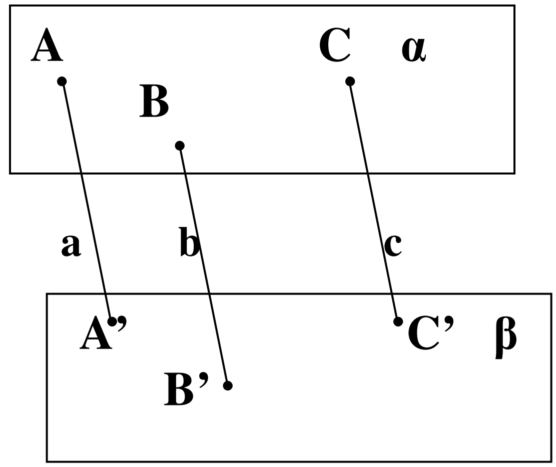




Tr.20.Doua plane paralele determina pe doua sau mai multe drepte paralele segmnete congruente.

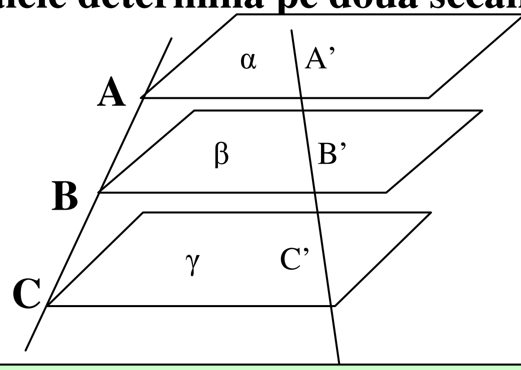
Daca $\alpha \parallel \beta$ si $a \parallel b \parallel c$, atunci $AA' \equiv BB' \equiv CC'$

Distanta dintre 2 plane paralele este constanta.



Tr.21.Mai multe plane paralele determina pe doua secante segmente proportionale.(Tr.Thales)

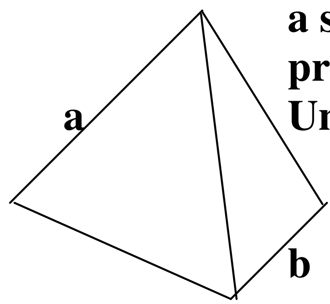
Daca $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$
atunci $AB/A'B'=BC/B'C'$



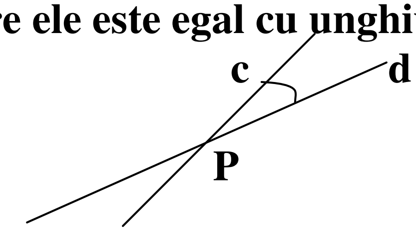
Ex.4. Fie cubul ABCDA’B’C’D’. Demonstrati ca $AC \parallel A'C'$, $AB \parallel D'C'$ si $AB' \parallel DC'$.
Ex.5. Fie ABCD si CDEF doua dreptunghiuri aflate in plane diferite. Demonstrati ca AB este paralela cu EF. AB este paralela cu DE ?
Ex.6. Fie VABCD o piramida cu baza trapez($AB \parallel CD$) si $d=(VAB) \cap (VCD)$. Ce pozitie are dreapta d fata de AB si CD ?
Ex.7. Fie ABCD tetraedru oarecare si MN linie mijlocie in ΔABC, iar EF linie mijlocie in ΔBCD, $M \in AB$, $N \in AC$, $E \in BD$, $F \in CD$. Demonstrati ca $MN \parallel EF$.
Ex.8. Fie cubul ABCDA’B’C’D’ si M,N,P,Q puncte pe laturile AA’,BB’,CC’,DD’ la 1/3 de baza, iar $O=AC \cap BD$, $O'=A'C' \cap B'D'$, iar $S=(MNP) \cap OO'$. Aflati O’S/O’O, C’S/SA .
Ex.9. In planul α avem dreptunghiul ABCD, iar in planul β patrulaterul A’B’C’D’. Stiind ca $\alpha \parallel \beta$ si $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ demonstrati ca A’B’C’D’ este tot un dreptunghi.

4. Perpendicularitate in spatiu:

1.Unghiul a doua drepte oarecare din spatiu este egal cu unghiul format de doua drepte paralele cu dreptele date si concurente. Spunem ca paralelismul pastreaza unghiurile.



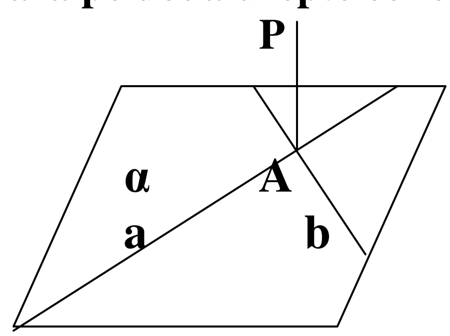
a si b sunt doua drepte necoplanare, ducem printr-un punct P doua drepte c ∥ a si d ∥ b. Unghiul dintre ele este egal cu unghiul dintre a si b.



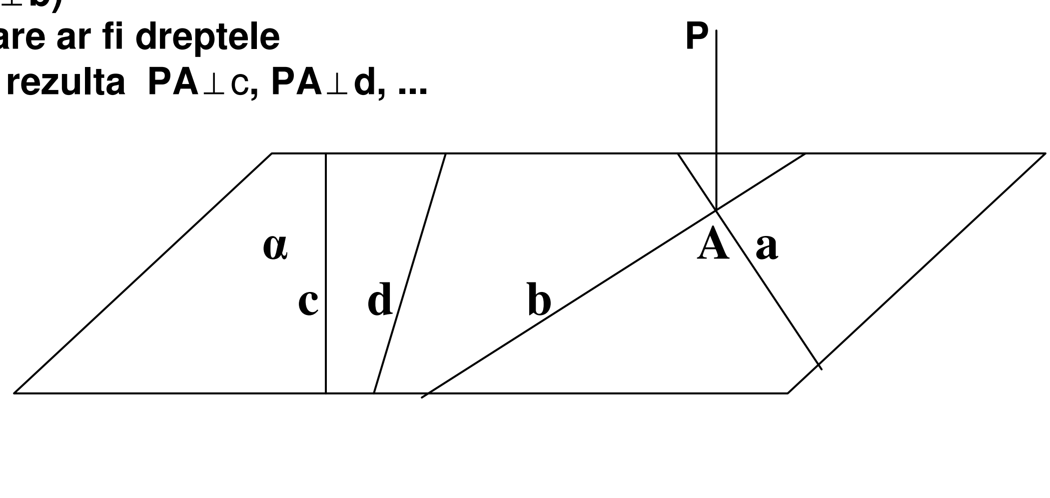
2.Doua drepte oarecare din spatiu sunt perpendiculare daca doua drepte paralele cu dreptele date si concurente formeaza intre ele un unghi de 90^0(perpendiculare). Deci daca unghiul dintre ele are 90^0.

Tr.22.O dreapata perpendiculara pe doua drepte concurente este perpendiculara pe plan.

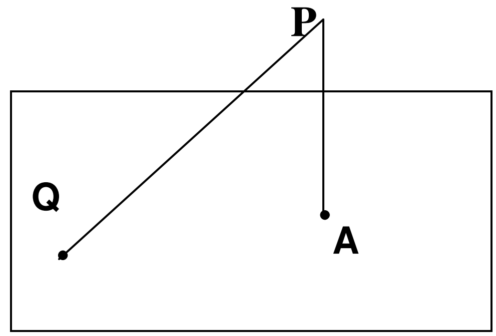
$a \cap b = \{A\}$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$
$PA \perp a$, $PA \perp b$, rezulta
$PA \perp \alpha$



Tr.23.O dreapata perpendiculara pe un plan este perpendiculara pe orice dreapta din plan.
Daca $PA \perp \alpha$(adica PA este $\perp$ pe doua drepte concurente a si b, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $PA \perp a$, $PA \perp b$)
Rezulta ca oricare ar fi dreptele
$c \subset \alpha$, $d \subset \alpha$, etc... rezulta $PA \perp c$, $PA \perp d$, ...



Tr.24.Dintr-un punct exterior unui plan putem construi o singura peprpendiculara pe acel plan.

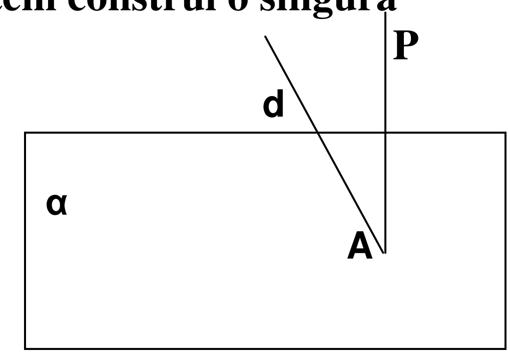


Daca PA$\perp\alpha$, A$\in\alpha$, P$\notin\alpha$ si Q$\in\alpha$ rezulta ca PQ nu este $\perp$ α

si PQ>PA oricare ar fi Q$\in\alpha$.

A este proiectia lui P pe plan, iar QA este proiectia lui PQ pe plan AQ=PQcos(<PQA)

Tr.25.Intr-un punct al unui plan putem construi o singura peprpendiculara pe acel plan.

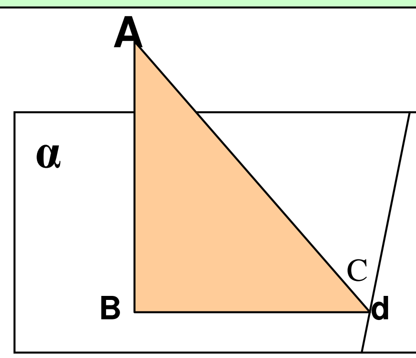


Daca PA$\perp$ α, A$\in\alpha$, P$\notin\alpha$

Atunci oricare ar fi dreapta d care trece prin A rezulta ca dreapta d nu este $\perp$ α

Tr.26 <u>Teorema celor trei perpendiculare si reciprocele ei:</u>

(Tr.3$\perp$)Daca AB$\perp$ α si BC$\perp$d, atunci AC$\perp$d , unde d$\subset$ α, C$\in$d B$\in$ α, A$\notin$ α.



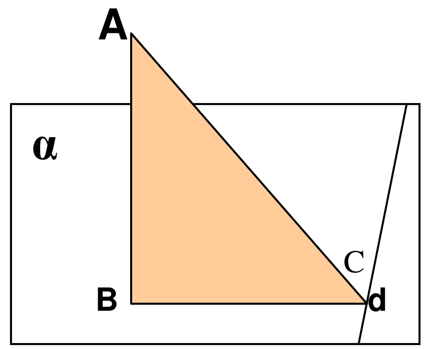
Daca AB$\perp$ α si d$\subset$ α atunci AB$\perp$d deci d$\perp$BC(ip) si d $\perp$AB rezulta ca d $\perp$(ABC) si cum AC$\subset$(ABC), rezulta d $\perp$AC.

Ex.10. Fie AB$\perp$ α si BC$\perp$d, unde d$\subset$ α, C$\in$d B$\in$ α, A$\notin$ α . Daca AB=4, BC=3 calculati distanta de la A la dreapta d.

Ex.11. Fie AB$\perp$ α si BC$\perp$d, unde d$\subset$ α, C$\in$d B$\in$ α, A$\notin$ α . Daca AB=8, AC=10 calculati BC si distanta de la A la dreapta d.

Ex.12. Fie AB$\perp$ α si BC$\perp$d, unde d$\subset$ α, C$\in$d B$\in$ α, A$\notin$ α . Daca distanta de la A la d este 13 si distanta de la A la planul α este 12 calculati distanta de la B la d.

Tr.27. (R1Tr.3⊥)Daca AB⊥ α si AC⊥d, atunci BC⊥d , unde d⊂ α, C∈d B∈ α, A∉ α.



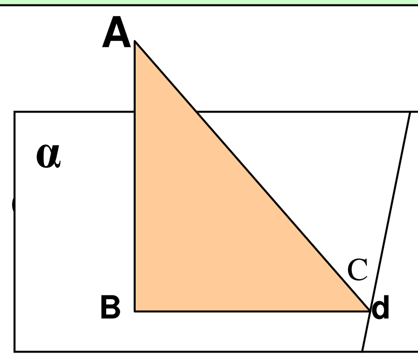
Daca AB⊥ α si d⊂ α atunci AB⊥d deci d⊥AC(ip) si d ⊥AB rezulta ca d ⊥(ABC) si cum BC⊂(ABC), rezulta d ⊥BC.

Ex.13. Fie AB⊥ α si AC⊥d, unde d⊂ α, C∈d B∈ α, A∉ α . Daca AB=11, AC=3 calculati distanta de la B la dreapta d.

Ex.14. Fie AB⊥ α si AC⊥d, unde d⊂ α, C∈d B∈ α, A∉ α . Daca AC=28, AB=10 calculati distanta de la B la dreapta d.

Ex.15. Fie AB⊥ α si AC⊥d, unde d⊂ α, C∈d B∈ α, A∉ α . Daca distanta de la A la d este 30 si distanta de la A la planul α este 24 calculati distanta de la B la d.

Tr.28. (R2Tr.3⊥)Daca AB⊥BC si BC⊥d, AC⊥d , atunci AB⊥ α unde d⊂ α, C∈d B∈ α, A∉ α.



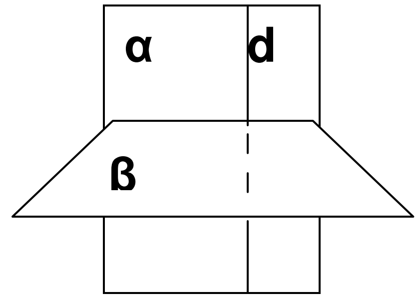
Daca d⊥BC si d⊂ α si AC⊥d deci d⊥(ABC) rezulta d⊥AB rezulta AB⊥AB si AB ⊥ d si α =(d;BC), rezulta AB ⊥ α.

Ex.16. Fie ΔABC dreptunghic in B si BC⊥d si AC⊥d, unde d⊂ α, C∈d B∈ α, A∉ α . Daca AB=4, BC=3 calculati distanta de la A la α si distanta de la A la d.

Ex.17. Fie AB⊥ BC, AC=4, CE=3, AE=5 si BC⊥d, unde d⊂ α, C∈d B∈α, E∈d A∉ α.Daca AB=2 calculati distanta de la B la dreapta d si distanta de la A la α.

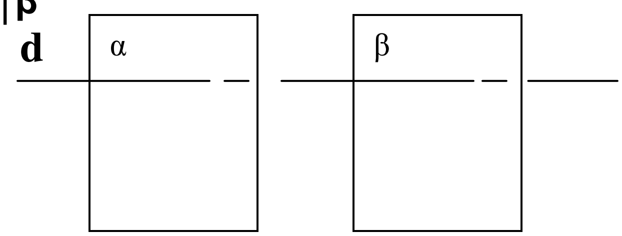
Tr.29.Daca o dreapta este perpendiculara pe un plan atunci orice plan care contine dreapta data este perpendicular pe planul dat.

Daca d $\perp$ β si **d⊂α atunci α $\perp$ β**



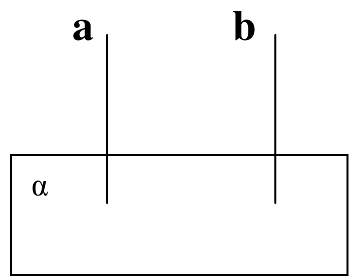
Tr.30.Doua plane perpendiculare pe aceeasi dreapta sunt paralele.

Daca d $\perp$ α si d $\perp$ β atunci α$\|$β



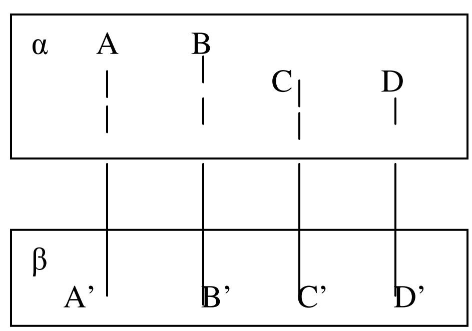
Tr.31. Doua drepte perpendiculare pe acelasi plan sunt paralele.

Daca a $\perp$ α si b $\perp$ α atunci a$\|$b



Tr.32.Distanta dintre doua plane paralele este constanta.

Daca α $\|$β, AA' $\perp$ α deci si AA' $\perp$ β
BB' $\perp$ α deci si BB' $\perp$ β
CC' $\perp$ α deci si CC' $\perp$ β
DD' $\perp$ α deci si DD' $\perp$ β
atunci AA'=BB'=CC'=DD'



Ex.18. **Fie A$\in$ α si PA$\perp$α, P$\notin$α si PA=12, d$\subset$α si AB$\perp$d, AB=5. Calculati distanta de la P la dreapta d.**

Ex.19. **Fie ΔABC dreptunghic in B si catetele AB=3, BC=4 astfel incit BC$\subset$α , d$\subset$α si d$\perp$(ABC), se cere distanta de la A la dreapta d si distanta de la A la planul α.**

Ex.20. **Fie ΔABC dreptunghic in A, ΔABD dreptunghic in D, iar ΔDAC dreptunghic in A si AB=10, BD=6 si CD=12. Calculati distanta de la C la planul (BAD) si distanta de la C la BD.**

Ex.21. **Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare si ΔACB dreptunghic in C, ΔACD dreptunghic in C, iar CM mediana in ΔBCD.**
Stiind ca AD=AB=12, BC=$4\sqrt{5}$, CM=6, se cere distanta de la C la planul (BAD) si distanta de la A la BD.

Ex.22. **Fie ΔABC dreptunghic in B, ΔABD dreptunghic in B, iar ΔDAC dreptunghic in A si AD=8, AC=6 si masura unghiului dintre planele (BCD) si (ACD) este de 60^0. Calculati distanta de la A la planul (BCD) si distanta de la B la (ACD).**

Ex.23. **Fie ABCD un tetraedru regulat , AB=8, iar O este intersectia medianelor ΔDCB. Calculati aria totala si volumul tetraedrului si distanta de la O la planul (ABC).**

Ex.24. **Fie VABCD o piramida patrulatera regulata, VA=12 si AB=$8\sqrt{2}$. Calculati aria totala si volumul piramidei si distanta de la O=AC∩BD, la planul (VMN), unde M este mijlocul lui AD, iar N este mijlocul lui CD.**

Ex.25. **Fie VABCDEF o piramida hexagonala regulata cu latura bazei, AB=10 si VA=20. Calculati aria totala si volumul piramidei si distanta de la C la planul (VAF).**

Ex.26. **Se da cubul ABCDA'B'C'D' cu latura bazei, AB=8. Calculati aria totala si volumul piramidei B'ABC si distanta de la B la planul (B'AC).**

Ex.27. **Fie VABCD o piramida patrulatera regulata, AB=$8\sqrt{2}$, iar unghiul dintre VA si planul (ACD) cu masura de 60^0 . Sectionam piramida cu un plan paralel cu planul (ABC) la 1/3 de virf.**
Calculati aria totala si volumul corpului care ramine dupa ce indepartam piramida mica formata prin sectionare.

Ex.28. **Fie ABCD un tetraedru regulat , AB=10, iar O este intersectia medianelor ΔDCB si AO=12. Calculati distanta de la A la BC si distanta de la mijlocul lui [AO] la BC.**

Ex.29. **Fie VABC o piramida triunghiulara cu baza ΔABC, triunghi echilateral, avind aria bazei egala cu $15\sqrt{3}/2$ si VA$\perp$ (ABC), iar VA=12. Calculati distanta de la V la BC.**

Ex.30. **Se da cubul ABCDA'B'C'D' cu latura bazei, AB=24. Calculati aria totala si volumul piramidei O'ABC, unde O'=A'C'∩D'B' si distanta de la A' la BD si distanta de la O=BC'∩CB' la AD.**

Ex.31. **Fie ABCD un romb cu latura de 12 si unghiul ascutit de 60^0, iar P$\notin$ (ABC) astfel incit PA=6 si PO=12. Se cere distanta de la P la PLANUL (BCD) si distanta de la P la CD. Aflati unghiul dintre planele (PBD) si (BCD).**

Ex.32. **Fie VABC o piramida triunghiulara regulata cu latura bazei de 15 si unghiul dintre VA si planul bazei (ABC) de 30^0. Sectionam piramida cu un plan paralel cu baza, planul (ABC), si la jumatatea distantei dintre V si planul (ABC). Calculati aria totala si volumul trunchiului de piramida format.**

Ex.33. **Fie ABCD un patrat cu latura de 8. Calculati perimetrul, aria si diagonala patratului. Daca ridicam, din unul din virfurile patratului, o perpendiculara VA pe planul patratului cu lungimea de 12, se cere sa calculati distantele din virful perpendicularei V, la laturile si diagonalele patratului.**

Ex.34. **Se da cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de 10. Calculati masura unghiului dintre planele (A'B'C') si (D'AC).**

Ex.35. **Se da triunghiul echilateral ABC cu latura de 4. Se cere raza cercului circumscris triunghiului, raza cercului inscris in triunghi si aria triunghiului. Fie VA$\perp$ (ABC), VA=20. Calculati distanta de la V la BC.**

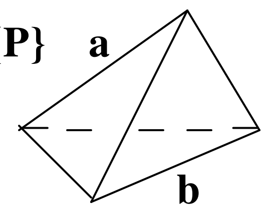
Ex.36. **Se da triunghiul oarecare ABC. Aratati ca oricare doua virfuri ale triunghiului sunt egal departate de mediana care porneste din cel de-al treilea virf al triunghiului. Fie AM, mediana si VA$\perp$ (ABC), aratati ca volumul piramidei VABM este egal cu volumul piramidei VACM oricare ar fi punctul V in spatiu si in afara planului (ABC).**

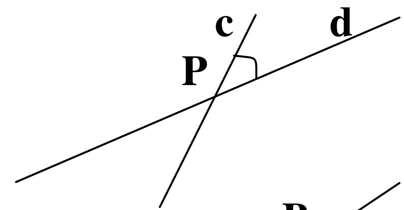
4. Unghiul a doua drepte in spatiu. Unghiul a doua plane

1.Unghiul a doua drepte oarecare din spatiu(nu au nici un punct comun) este egal cu unghiul a doua paralele cu dreptele date si care sunt si concurente.

$a \cap b = \emptyset$, $c \parallel a$ si $d \parallel b$, $c \cap d = \{P\}$

$\sphericalangle(a;b) = \sphericalangle(c;d)$

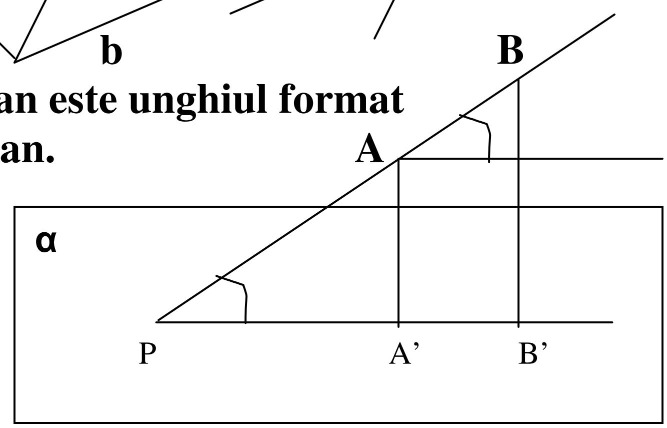




2.Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul format de dreapta cu proiectia ei pe plan.

$AA' \perp \alpha$ si $BB' \perp \alpha$, $AB \cap \alpha = \{P\}$

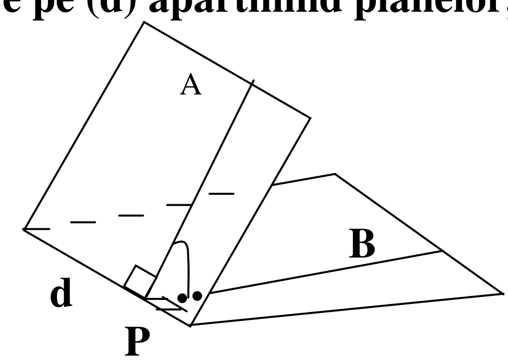
$\sphericalangle(AB, \alpha) = \sphericalangle APA'$



3.Unghiul dintre doua plane care au o dreapta (d) in comun este unghiul format de doua perpendiculare pe (d) apartinind planelor, duse in acelasi punct de pe dreapta d.

Fie $AP \perp d$ si $BP \perp d$

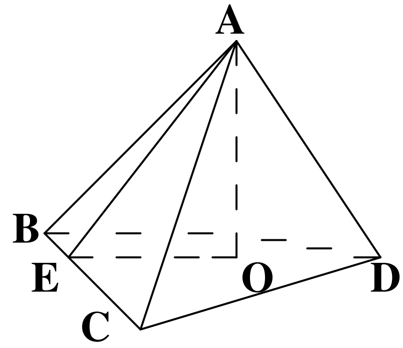
$\sphericalangle APB$ este unghiul dintre plane



4.Unghiul diedru este unghiul format de doua semiplane determinate de dreapta comuna planelor. Dreapta comuna o vom numi muchia diedrului(dreapta d de mai sus).

Unghiul plan al diedrului sau unghiul plan corespunzator diedrului este unghiul format de doua semidrepte avind originea comuna pe muchia diedrului, fiecare fiind dusa in unul din cele doua semiplane si fiind perpendiculare pe muchie($\sphericalangle APB$ de mai sus).

5. Poliedre. Corpuri rotunde. Arii si volume.



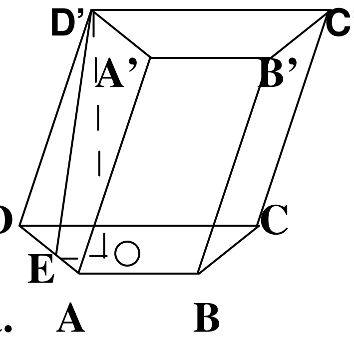
1.Tetraedrul

Patru puncte necoplanare formeaza un corp pe care-l numim tetraedru.
Inaltimea tetraedrului este perpendiculara dintr-unul din virfuri pe fata opusa.
Aria totala a tetraedrului este suma ariilor fetelor tetraedrului.
Volumul tetraedrului este egal cu aria unei fete inmultita cu o treime din inaltimea corespunzatoare fetei.
Fie $AO\perp(BCD)$ $OE\perp BC$, rezulta cu T3$\perp$ ca $AE\perp BC$, deci inaltimea teratedrului este AO. $A_t=A_{(\Delta ABC)}+A_{(\Delta ACD)}+A_{(\Delta ABD)}+A_{(\Delta BCD)}$,
Volumul teratedrului este $V= A_{(\Delta BCD)}\cdot AO/3 =$...

1.Tetraedrul regulat

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numeste tetraedru regulat. Deci ΔABC, ΔACD, ΔADB, ΔBCD sunt toate, triunghiuri echilaterale congruente, deci AB=AC=AD=BC=CD=DB.
Toate fetele sunt triunghiuri echilaterale.
Inaltimea tetraedrului regulat cade in centrul fetei opuse, care este la intersectia inaltimilor fetei ; sunt 4 inaltimi congruente.
Fie $AO\perp(BCD)$ $OE\perp BC$, rezulta cu T3$\perp$ ca $AE\perp BC$, deci inaltimea teratedrului este AO. Dar ΔABC, este triunghi echilateral deci AE este si mediana , adica E este mijlocul lui BC, insa si ΔBCD este triunghi echilateral, deci OE este mediatoare si deci este si inaltime rezulta ca OE trece prin D, deci O este pe inaltimea din D a ΔBCD, si analog este si pe celelalte doua inaltimi ale ΔBCD. Stim , de asemenea ca O este la 2/3 de virf si la 1/3 de baza ΔBCD, adica OD=2DE/3, iar OE=DE/3, etc...
Aria totala a tetraedrului este de patru ori aria unei fete a tetraedrului. Volumul tetraedrului este egal cu aria unei fete inmultita cu o treime din inaltimea corespunzatoare fetei.
Notam cu l_3=latura Δ echilateral, a_3=apotema Δ echilateral, R=raza cercului circumscris Δ echilateral, $a_3= l_3\sqrt{3}/6$, $AO= l_3\sqrt{6}/3$, $AE= l_3\sqrt{3}/2$, $A_{bazei}= l^2_3\sqrt{3}/4$, $A_{lat}=3\, l^2_3\sqrt{3}/4$, $A_t=4A_{(\Delta ABC)} =l^2_3\sqrt{3}$,
Volumul tetraedrului este $V= A_{(\Delta BCD)}\cdot AO/3 = l^3_3\sqrt{2}/12$

1.Prisma



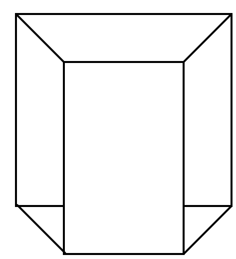
Daca bazele sunt doua poligoane paralele, iar muchiile laterale sunt paralele si trec prin virfurile poligoanelor de la baza atunci ele formeaza un corp pe care-l numim prisma. Inaltimea prismei este perpendiculara dintr-unul din virfurile unei baze pe baza opusa.

$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, fie $D'O \perp (ABC)$, $OE \perp AD$ rezulta (T3$\perp$) $D'E \perp AD$, $h=D'O$=inaltimea prismei(distanta dintre baze).

Aria laterala a prismei este suma ariilor fetelor laterale ale prismei. De exemplu aria fetei AA'DD' este egala cu $AD \cdot D'E$, iar $A_l=A_{AA'DD'}+A_{AA'BB'}+A_{BB'CC'}+A_{CC'DD'}=(AB+BC+CD+...)h$

Aria totala a prismei este suma dintre aria laterala a prismei si ariile bazelor . $A_t= A_l +A_{ABCD}+A_{A'B'C'D'}=P_{bazei}h+A_{ABCD}+A_{A'B'C'D'}$

Volumul prismei este egal cu aria unei baze inmultita cu inaltimea prismei. $V= A_b \cdot h=A_{ABCD} \cdot D'O=A_{ABCD} \cdot h$



O prisma dreapta este o prisma in care orice muchie laterala este perpendiculara pe baze.

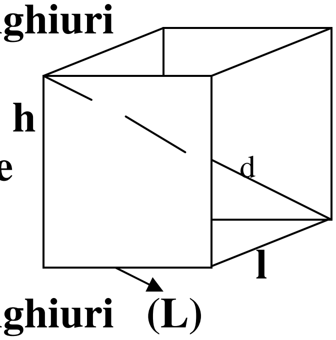
$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, si $AA' \perp (ABC)$, $AA' \perp (A'B'C')$...

Paralelipipedul este o prisma cu bazele paralelograme. ABCD si A'B'C'D'=paralelograme

Paralelipiped drept este un paralelipiped cu fetele laterale drptunghiuri(bazele sunt totusi paralelograme).

ABCD si A'B'C'D'=paralelograme

Iar AA'DD',AA'BB',BB'CC',CC'DD' sunt dreptunghiuri



Paralelipiped dreptunghic este un paralelipiped cu toate fetele dreptunghiuri(fetele laterale si bazele sunt dreptunghiuri).

ABCD si A'B'C'D'=dreptunghiuri

Iar AA'DD',AA'BB',BB'CC',CC'DD' sunt dreptunghiuri

Aria totala a paralelipipedului dreptunghic =$At=2(Ll+lh+Lh)$,

diagonala paralelipipedului dreptunghic=d si $d^2=L^2+l^2+h^2$

volumul=$V=A_{bazei} \cdot h=Llh$=produsul dimensiunilor

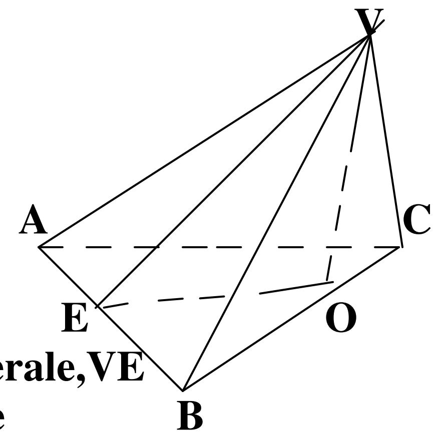
Cubul are toate fetele patrate: volumul $V=l^3$, $A_t=6l^2$, diagonala $d=l\sqrt{3}$

O prisma triunghiulara este o prisma in care bazele sunt triunghiuri.

O prisma hexagonala este o prisma in care bazele sunt hexagoane.

1.Piramida

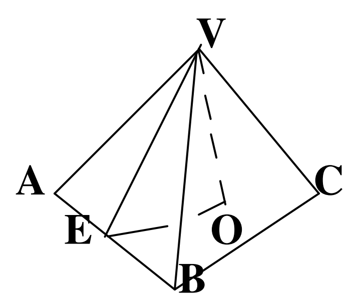
Patru puncte necoplanare formeaza un corp pe care-l numim piramida.



Virful=V
Baza=poligonul opus lui V, ΔABC
Fetele laterale=ΔVAB, ΔVAC, ΔVBC, ...
Muchiile laterale=VA, VB, VC,....
Muchiile de la baza=AB, BC, CD,...
Muchiile piramidei=laterale si ale bazei
Apotema piramidei=inaltimile fetelor laterale,VE
Aria laterala=suma ariilor fetelor laterale
Ariile bazelor=aria poligoanului de la baza
Inaltimea piramidei este perpendiculara dintr-unul din virfuri pe fata opusa. $VO \perp (ABC)$
Aria totala a piramidei este suma ariilor fetelor piramidei.
Volumul piramidei este egal cu aria unei fete inmultita cu o treime din inaltimea corespunzatoare fetei. $V=A_{ABC} \cdot VO/3$

1.Piramida regulata

O piramida cu muchiile laterale congruente si avind baza un poligon regulat se numeste piramida poligonala regulata.
Toate fetele sunt triunghiuri isoscele(VAB, VBC, ...).
Inaltimea piramidei regulate cade in centrul bazei, care este la intersectia inaltimilor(=mediane, mediatoare, bisectoare) .
Aria totala a piramidei este suma ariilor fetelor laterale, care sunt de altfel egale intre ele, si aria bazei(un poligon regulat).
Volumul piramidei este egal cu aria bazei inmultita cu o treime din inaltime. $V=A_b \cdot VO/3$, A_b=aria bazei
Deci ΔVAB, ΔVBC, ΔVCD, ...
sunt triunghiuri isoscele congruente.
Baza este poligon regulat:
triunghi echilateral, patrat,
hexagon regulat, etc...



De exemplu daca baza este triunghi echilateral, ΔABC si $VO \perp (ABC)$ $OE \perp AB$, rezulta cu T3$\perp$ ca $VE \perp AB$, deci inaltimea este VO. Dar ΔVAB, este triunghi isoscel deci VE este si mediana , adica E este mijlocul lui AB, insa ΔABC este triunghi echilateral, deci OE este mediatoare si deci este si inaltime rezulta ca OE trece prin C, deci O este pe inaltimea din C a ΔABC, si analog este si pe celelalte doua inaltimi ale ΔABC. Stim , de asemenea ca O este la 2/3 de virf si la 1/3 de baza ΔABC, adica $R=CO=2CE/3$, iar $OE=CE/3$, etc...

Volumul piramidei este $V= A_{(\Delta ABC)} \cdot VO/3$, aria laterala A_{lat} =suma ariilor fetelor laterale care sunt triunghiuri isoscele congruente, deci este semi-perimetrul bazei inmultit cu apotema piramidei(inaltimea fetei)=$P_{bazei}.a_p/2$. Aria totala = $A_t= A_{lat} +A_{(\Delta ABC)}$.

Ex.37. Calculati aria laterala a unei piramide triunghiulare regulate cu inaltimea de 4, iar apotema de 12.

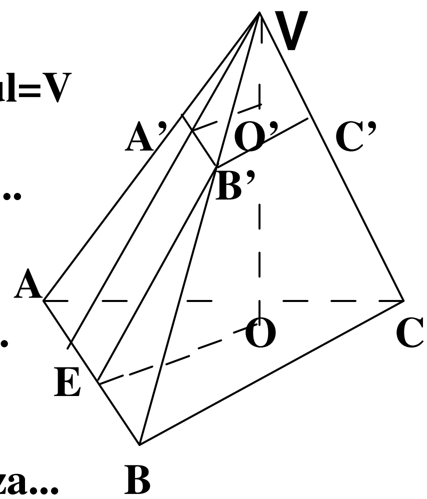
Ex.38. Calculati volumul unei piramide patrulatere regulate care are aria laterala 144, iar aria totala 169.

Ex.39. Calculati volumul si aria laterala a unei piramide triunghiulare regulate cu latura bazei de 24, iar unghiul dintre muchia laterala si latura bazei de 45^0.

Ex.40. Fie VABCD o piramida patrulatera regulata cu apotema de 6 si masura unghiului dintre muchii si diagonalele alaturate de 45^0. Calculati tangenta unghiului dintre fetele VAB si VBC, VAB si VCD, precum si unghiul dintre VA si dreapta $d=(VAD)\cap(VBC)$.

Ex.41. Fie VABC o piramida triunghiulara regulata. Avind aria laterala egala cu 256. Prin mijlocul inaltimii ducem un plan paralel cu (VAB) . Calculati aria sectiunii formate.
Ex.42. Fie VABCD o piramida regulata cu baza patrat cu latura de 20, iar unghiul dintre o mucie laterala si latura bazei alaturata ei de 45^0.
Aflati aria si volumul piramidei si distanta de la punctul de intersectie a diagonalelor patratului ABCD, la (VAB).

1.Trunchiul de piramida



Virful piramidei din care provine trunchiul=V
Bazele=ΔABC, ΔA'B'C' sau...
Fetele laterale = trapeze A'B'AB, B'C'BC...
Muchiile laterale: AA',BB',CC',...
Muchiile de la baza: AB, BC, AC, A'B',...
Muchiile trunchiului : AA',BB',AB,A'B',...
Apotema trunchiului: B'E ⊥ AB,...
Aria laterala=aria trapezelor AA'BB', ...
Ariile bazelor = aria poligoanelor de la baza...
Inaltimea trunchiului este perpendiculara dintr-unul din virfuri pe baza(OO'), VO este inaltimea piramidei mari din care provine trunchiul, iar VO' inaltimea piramidei mici.
Aria totala a trunchiului este suma ariilor fetelor trunchiului, fetele laterale(trapeze) si ariile bazelor. $A_l=(P_{Bazei\ mari}+P_{bazei\ mici})A_{potema\ tr.}/2$
$A_t= A_l+B+b$, $P_{Bazei\ mari}$**=perimetul bazei mari,** $P_{bazei\ mici}$**=perimetrul bazei mici,** $A_{potema\ tr.}$ **=apotema trunchiului**
Volumul trunchiului este egal cu o treime din inaltime inmultita cu suma dintre ariile bazelor si radacina patrata din produsul lor.
$V=(B+b+\sqrt{Bb})h/3$**, unde B=aria bazei mari, b=aria bazei mici, h=OO'**
Raportul volumelor celor doua piramide formate prin sectionarea (taierea) piramidei mari(VABC) cu planul (A'B'C') paralel cu baza (ABC) este egal cu cubul raportului de asemanare.
$V'=A_{\Delta A'B'C'}\cdot VO'/3$ **, iar** $V=A_{\Delta ABC}\cdot VO/3$ **deci raportul celor doua volume este :** $V'/V= A_{\Delta A'B'C'}\cdot VO'/ A_{\Delta ABC}\cdot VO$**, dar** $A_{\Delta A'B'C'}= A'B'\cdot i'/2$
$A_{\Delta ABC}=AB\cdot i/2$**, deci raportul lor este** $A_{\Delta A'B'C'}/ A_{\Delta ABC}=A'B'\cdot i'/ AB\cdot i$ **, dar din asemanarea triunghiurilor ΔVA'B'~ΔVAB, ΔVO'B'~ΔVOB ΔVO'M'~ΔVOM, etc... obtinem :**
$A'B'/AB=VO'/VO=i'/i$**, deci raportul ariilor este patratul raportului de asemanare :** $A_{\Delta A'B'C'}/ A_{\Delta ABC}=A'B'\cdot i'/ AB\cdot i=(i'/i)^2$ **, iar raportul volumelor :** $V'/V=(h'/h)^3$ **.**
Se vede ca volumul trunchiului este egal cu diferenta volumelor celor doua piramide : $V_t=V-V'$ **, ceea ce poate usura calculele.**
Ex.1. Fie VABCD o piramida patrulatera regulata cu latura de 12, iar unghiul dintre o fata laterala si baza de 60^0**. Sectionam piramida cu un plan (A'B'C'D') paralel cu baza la 1/3 de virf. Se cere aria si volumul trunchiului format si distanta de la O la planul (VAB) si**

ditanta de la M=mijlocul lui [AB], la intersectia d a planelor (VAB) si (VCD).

AB=12, h=VO

VO$\perp$ (QBC), OM$\perp$AB, deci VM$\perp$AB

VAB=isos, deci M=mij.AB si OM=AB/2

m(<VMO)=60^0, cos60^0=OM/VM

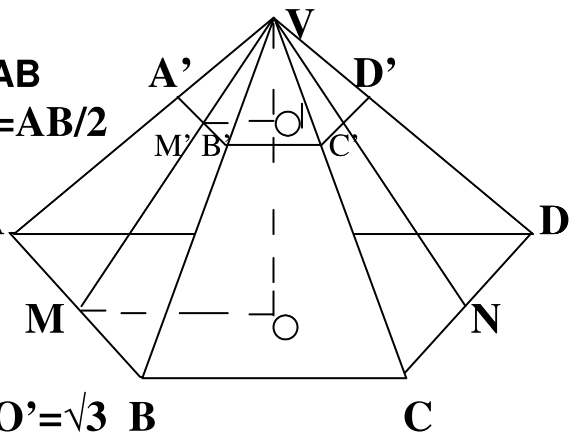
VM=2OM=12 (sau VMN=echi)

VO'M'VOM, deci 1/3=VO'/VO=

O'M'/OM=VM'/VM, rezulta:

O'M'=2, VM=AB=12, VM'=4,

MM'=8, VO=$3\sqrt{3}/2$, VO'=$\sqrt{3}/2$, OO'=$\sqrt{3}$



$A_{ABCD}=AB^2=144$, $A_{A'B'C'D'}=(1/3)\,A_{ABCD}=48$, A'B'=(1/3)AB=4

$V_{VABCD} = A_{ABCD}\cdot h/3=72\sqrt{3}$, $V_{VA'B'C'D'} = V_{VABCD}/3=24\sqrt{3}$

$V_{ABCDA'B'C'D'}= V_{VABCD} - V_{VA'B'C'D'} =24\sqrt{3}(3-1)= 48\sqrt{3}$

$A_{ABCDA'B'C'D'}=A_{ABCD}+A_{A'B'C'D'}+4A_{A'B'AB}=144+48+4\cdot(AB+A'B')MM'/2$, deci $A_{ABCDA'B'C'D'} =192+256=448$

Piramida VOAB are inaltimea VO, cunoscuta si baza OAB care are aria egala cu ¼ din aria bazei ABCD, deci $V_{VOAB} = A_{OAB}\cdot h/3=36\sqrt{3}/2$, dar $V_{VOAB} = A_{VAM}\cdot OE/3$, deci OE=3 V_{VOAB}/ A_{VAM}, unde OE este distanta de la O la planul (VAB), deoarece daca OE$\perp$VM , atunci, cum si OM$\perp$AB, iar VM$\perp$AB, R2T3$\perp$ spune ca OE$\perp$(VAB).

Planele (VAB) si (VCD) se taie dupa o dreapta d paralela cu AB, deoarece AB $\parallel$ CD si deci AB$\parallel$(VCD), dar VM$\perp$AB, deci VM$\perp$d, iar distanta este chiar VM=12.

Ex.43. Fie ABCA'B'C' un trunchi de piramida triunghiulara regulata cu latura bazei mari de 36, latura bazei mici 12 si volumul de 144. Calculati apotema, muchia, inaltimea si aria trunchiului.

Ex.44. Un trunchi de piramida triunghiulara regulata cu latura bazei mari de 64, latura bazei mici 32 si apotema de 256. Calculati aria trunchiului si volumul.

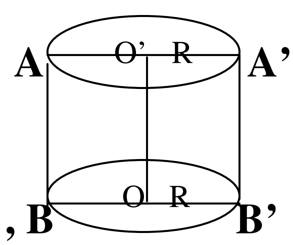
Ex.45. Un trunchi de piramida triunghiulara regulata cu latura bazei mari de 16, latura bazei mici 15 si unghiul format de muchia laterala cu muchia bazei mari, care pornesc din acelasi virf, egal cu 60^0. Calculati aria trunchiului si volumul.

1.Corpuri rotunde

Corpurile rotunde sunt corpuri de rotatie, intuitiv ele sunt generate de puncte sau segmente/drepte care se misca. De exemplu o sfera o putem imagina ca find generata de un punct care se misca in spatiu la o distanta fixa de un punct fix dat.
Cilindrul ia nastere prin miscarea unui segment in jurul unui punct fix la distanta constanta de acest punct fix, segmentul fiind mereu paralel cu o directie data si fixa.
Conul ia nastere prin miscarea capatului unui segment in jurul unui punct fix, la distanta data, constanta , segmentul avind celalalt capat fix.

1.Cilindrul circular drept

Cilindrul circular drept ia nastere prin miscarea unui segment in jurul unui punct fix la distanta constanta de acest punct fix si intre doua plane paralele pe care segmentul este perpendicular.
Astfel bazele sunt doua cercuri cu aceeasi raza, paralele, iar segmentul care genereaza cilindrul este mereu paralel cu o directie fixa, data.

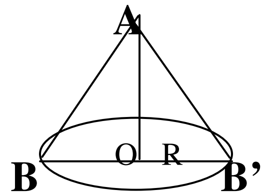


Se dau, segmentul [AB] si punctul fix O si dreapta d si o lungime fixa R si doua plane paralele, $\alpha \parallel \beta$, iar $A \in \alpha$,$B \in \beta$. Daca [AB] se roteste in jurul lui O, la distanta R de O astfel incit mereu $AB \parallel d$ si $AB \perp \alpha$, $AB \perp \beta$ atunci [AB] genereaza un cilindru circular drept. De aceea [AB] se numeste generatoarea cilindrului, R este raza celor doua cercuri care sunt numite bazele cilindrului. Se vede ca inaltimea cilindrului este egala cu generatoarea cilindrului, adica OO'=G=h=AB=A'B'=... , unde O si O' sunt centrele cercurilor de la baza cilindrului, OB=OB'=OA=OA'=R. Volumul cilindrului $V= \pi R^2 G = \pi R^2 h$, iar aria laterala(=aria dreptunghiului cu $L=2\pi R$ si $l=G$ care este desfasurarea cilindrului) $A_l= 2\pi RG$, aria totala $A_t= 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R)$

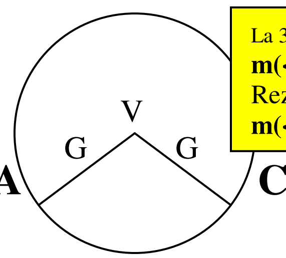
<u>Ex.46.</u> Calculati volumul cilindrului circular drept care are generetoarea si raza direct proportionale cu numerele 5 si 12, iar diagonala sectiunii axiale face cu planul bazei un unghi de 60^0.

1.Conul circular drept

Conul ia nastere prin miscarea capatului unui segment in jurul unui punct fix, la distanta data, constanta de punctul fix, segmentul avind celalalt capat fix.
fixa, data.
Se dau, segmentul [AB] si punctul fix O si o lungime fixa R si planul α, iar A=fix si O,B∈ α . Daca B se roteste in jurul lui O, la distanta R de O astfel incit B descrie un cerc si AO⊥ α atunci [AB] genereaza un con circular drept. De aceea [AB] se numeste generatoarea conului, R este raza cercului care este baza conului. Se vede ca inaltimea conului, AO este cateta triunghiului dreptunghic AOB, in care generatoarea AB este ipotenuza, deci $AB^2=AO^2+OB^2$, adica $G^2=h^2+R^2$, unde generatoarea G=AB=AB'=... , inaltimea h=AO si raza R=Ob=OB', O este centrul cercului de la baza conului. Triunghiul ABB' este un triunghi isoscel, dar poate fi si echilateral sau dreptunghic si isoscel.

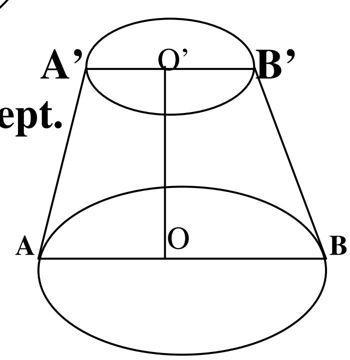


Volumul conului $V= \pi R^2h/3$, iar aria laterala $A_l=\pi RG$, aria totala $A_t=\pi RG +\pi R^2=\pi R(G+R)$. Aria laterala =aria sectorului de cerc care se obtine prin desfasurarea conului: lungimea arcului mic AC este egala cu lungimea cercului de la baza conului=$2\pi R$, iar raza cercului mare cu centrul in V este G.



La 360^0……lungime crec=$2\pi G$
m(<AVC)..................$2\pi R$
Rezulta:
m(<AVC)= 360^0**R/G**

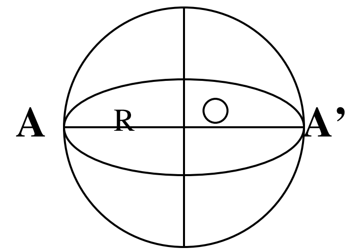
Sectionind un con cu un plan paralel cu cercul de la baza se obtine un trunchi de con circular drept. Volumul trunchiului de con circular drept $V= (\pi h/3)(R^2+ r^2+Rr)$, iar aria laterala $A_l=\pi G(R+r)$, aria totala $A_t=\pi G(R+r) +\pi(R^2+r^{2)}$ Unde G=AA'=BB', h=OO', r=A'O'=O'B' R=OA=OB,



Ca si la piramida raportul dintr volumul conului mic(V') care a fost indepartat prin sectionare pentru a obtine trunchiul de con si volumul conului mare din care provie conul este egal cu cubul raportului de asemanare, adica :
V'/V=VO'/VO=VA'/VA=VB'/VB=.....=r/R, pentru ca avem triunghiurile asemenea ΔVO'A' ~ΔVOA.

1.Sfera

Sfera o putem imagina ca find generata de un punct care se misca in spatiu la o distanta constanta de un punct fix dat.
O=centrul sferei, este fix
OA=R, raza sferei



Volumul sferei $V= 4\pi R^3/3$, iar aria(totala) $A=4\pi R^2$

Notam cu a latura unui cub si cu $r_{sf.insrc}$ = raza sferei inscrisa in cub, $r_{sf.insrc}= a/2$ si $R_{sf.circ}$= raza sferei circumscrisa cubului : $R_{sf.circ}= a\sqrt{3}/2$.

Notam cu L, l, h laturile unui paralelipiped dreptunghic si cu $R_{sf.circ}$= raza sferei circumscrisa paralelipipedului : $R_{sf.circ}= a\sqrt{3}/2$.

Notam cu a latura teratedrului regulat si cu $r_{sf.insrc}$ = raza sferei inscrisa in acest tetraedru si $R_{sf.circ}$= raza sferei circumscrisa tetraedrului : $R_{sf.circ}= (\sqrt{L^2+l^2+h^2})/2$

<u>Ex.47.</u> Raza unei sfere este de 12. Calculati aria si volumul sferei.
<u>Ex.48.</u> Razele a trei sfere sunt 12; 18 si 24. Aflati aria sferei care are aria egala cu media aritmetica a celorlalte doua.
<u>Ex.49.</u> Aflati raza unei sfere daca aria si volumul ei sunt egale.
<u>Ex.50.</u> Raza unei sfere este 12. Aflati volumul unui con circumscris sferei.
<u>Ex.51.</u> Raza unei sfere este 24. Aflati volumul unui cub in care este inscrisa sfera, care este astfel tangenta la toate fetele cubului inclusiv bazele.
<u>Ex.52.</u> Raza unei sfere este 36 si in ea inscriem un cub, astfel ca virfurile acestuia sunt pe sfera. Aflati volumul cubului.
<u>Ex.53.</u> Razele a trei sfere sunt direct proportionale cu 15; 28 si 48. Stim ca raza unei sfere este media aritmetica a celorlalte doua. Aflati volumul celor trei sfere.
<u>Ex.54.</u> Diagonala unui cub este 12. Aflati volumul celor trei sfere circumscrisa cubului.
<u>Ex.55.</u> Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' si M,N,P,Q puncte pe laturile AA',BB',CC',DD' la 1/3 de baza, iar $O=AC\cap BD$, $O'=A'C'\cap B'D'$, iar $S=(MNP)\cap OO'$. Aflati O'S/O'O, C'S/SA si volumul sferei circumscrisa paralelipipedului, stiind ca dimensiunile paralelipipedului sunt $L=h\sqrt{3}$, $l=h$, iar h=inaltimea paralelipipedului.