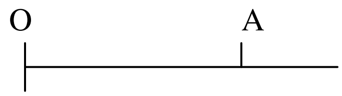
PUNCTUL.DREAPTA. PLANUL

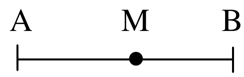
1.Punctul : notatii: A,B,C,… ▪ A ▪E=F P▪ Q▪ P$\neq$Q

2.Dreapta d sau dreapta AB

Semidreapta OA, notata [OA
sau (OA, adica fara O



3.Segmentul AB, notat [AB]
(AB),[AB),(AB]



M este mijlocul lui [AB] daca MA=MB=AB/2 sau [MA]≡[MB]

Ex.1 Fie segmentul [AB] cu lungimea de 10 cm, si M mijlocul sau. Ce lungime are seg.[AM] ?

Ex.2 Fie A,B,C,D patru puncte coliniare, in aceasta ordine, si M, mijlocul lui [BC], iar N mijlocul lui [AD]. Iar [AB] ≡ [CD], AD=40 cm, BC=10 cm. Ce lungime are seg.[MN] ? Dar [AN], [AC] ?

Ex.3 Fie A,B,C,D patru puncte coliniare, in aceasta ordine, si M, mijlocul lui [BC] si al seg.[AD], iar N mijlocul lui [AB]. Iar CD=10 cm, ND=80 cm. Ce lungime are seg.[MN] ? Dar [AN]. Dar [AC] ?

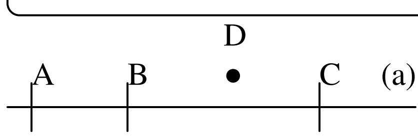
Ex.4 Se dau doua puncte A si B, iar M mijlocul lui [AB], N mijlocul lui [AM], P mijlocul lui [AN], Q mijlocul lui [AP], etc. Daca cineva ar pune cite un bob de nisip in toate mijloacele posibile, M,N,P,Q, etc, iar apoi ar parcurge distanta dintre A si B calcind pe toate aceste fire de nisip cit timp i-ar trebui pentru a ajunge in B ? Explicati, considerind ca firele de nisip nu au dimensiuni.

4.Definitie :

Orice multime nevida de puncte este o **figura geometrica.**
Punctul, dreapta si planul sunt multimi de puncte, deci sunt figuri geometrice.
- M$\neq$N **puncte distincte** sau **diferite** **M●** N●
- E=F **puncte identice** sau **confundate** E=F●

-Trei puncte distincte determina un plan
-Doua drepte concurente determina un plan
-O dreapta si un punct nesituat pe ea determina un plan
-Doua drepte paralele determina un plan

5.Definitie : Mai multe puncte care apartin aceleiasi drepte se numesc **puncte coliniare**.

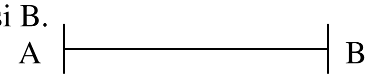


A,B,C=coliniare(A$\in$ a, B$\in$ a, C$\in$ a), D$\notin$a

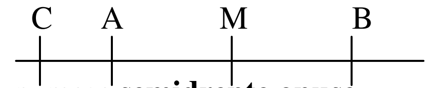
6.Axioma dreptei : Prin doua puncte distincte trece o dreapta si numai una

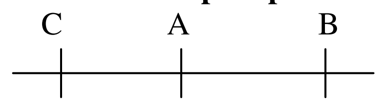
7.Definitii :

1. Pentru doua puncte A si B, **segmentul AB** este multimea ale caror elemente sunt A,B, impreuna cu toate punctele care sunt intre A si B.
   Punctele A si B se numesc **capetele** lui [AB].

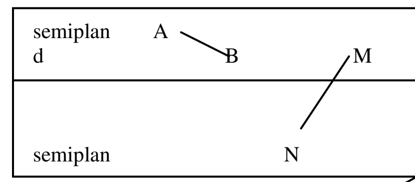


2. Fie A si B doua puncte diferite. **Semidreapta AB** este multimea :
   {M/M parcurge dreapta AB de la A inspre B}
   Punctul A se numeste **originea** lui [AB
   Daca A este intre B si C, atunci [AB si [AC se numesc **semidrepte opuse**.

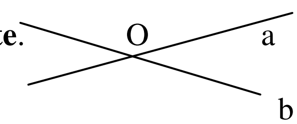




3. Orice dreapta d dintr-un plan il imparte in doua semiplane, numite semiplane opuse.
   ● Dreapta *d* nu este inclusa in nici unul din semiplane.
   ● Daca 2 puncte sunt in acelasi semiplan, atunci segmentul care le uneste este in acel semiplan si deci nu intersecteaza dreapta d(A si B); in caz contrar, segementul intersecteaza dreapta(M si N).



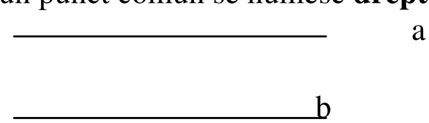
Doua drepte care au un singur punct comun se numesc **drepte concurente**.



$a \cap b = \{O\}$; O este punctual de intersectie

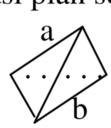
Doua drepte a si b din acelasi plan care nu au nici un punct comun se numesc **drepte paralele**
a ‖ b

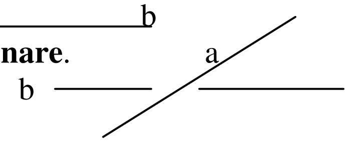
$a \cap b = \emptyset$



Doua drepte nesituate in acelasi plan se numesc **drepte necoplanare**.

$a \cap b = \emptyset$





Doua figuri geometrice se numesc **congruente** daca prin suprapunere coincid.

- Lungimea unui segment este numarul care exprima de câte ori o unitate de masura se cuprinde in segmentul respectiv.
- Distanta dintre doua puncte A si B, notata AB, este lungimea segmentului [AB].

●Punctul M este intre A si B daca A, M si B sunt puncte diferite doua câte doua pe aceeasi dreapta si AM+MB=AB. A ____________M________ B Daca AM=MB atunci M=mij.[AB]
●Doua segmente care au lungimi egale sunt segmente congruente si reciproc, doua segmente congruente au lungimi egale.
Daca [AB] este congruent cu [CD] scriem [AB]≡[CD]

- Mijlocul unui segment este acel punct al segmentului care-l imparte in doua segmente congruente. M este mijlocul lui [AB] daca si numai daca AM=MB=AB/2 (v.figura mai sus)

<u>Ex.5</u> Fie M mijlocul lui [AB], N mijlocul lui [AM] si Q mijlocul lui [AN], iar AN=15 cm. Calculati lungimea lui [AB].

<u>Ex.6</u> Fie AB=20 cm si M mijlocul lui [AC], iar AM=35 cm si N este mijlocul lui [MB]. Calculati lungimea segmentului [NC].

<u>Ex.7</u> Fie M pe [AB] astfel incit AM/MB=1/3. Cit este MB/AB ?

<u>Ex.8</u> Fie M mijlocul segmentului [AB], iar N mijlocul lui [BC], iar AM+NC=12, B€AC. Cit este lungimea segmentului [AC].

<u>Ex.9</u> Fie M pe [AB] astfel incit MA/MB=2/5 si N∈[MB] astfel incit NB/BM=3/10. Cit este AM/MN ? Dar AN/NB ?

<u>Ex.10</u> Fie dat [AB] . Construiti cu rigla si compasul punctul M pe [AB], astfel incit MA/MB=1/2. Punctul M este mijlocul lui [AB] ?

<u>Ex.11</u> Fie dat [AB] si P un punct care nu este pe dreapta AB. Construiti cu rigla si compasul punctul P astfel incit PA/PB=4/5.

<u>Ex.12</u> Fie date A,B,C trei puncte coliniare, astfel incit AB=12 cm, AC=32 cm, BC=44 cm. In ce ordine apar punctele pe dreapta AB ?

<u>Ex.13</u> Desenati punctele A,B,C astfel incit AB=8 cm si BC=5 cm. Calculati lungimea segmentului AC daca este posibil.

<u>Ex.14</u> Fie punctele A,B,C coliniare si M mijlocul lui [AB], iar N mijlocul lui [BC] si AC=24. Calculati lungimea saegmentului MN.

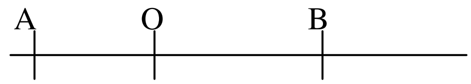
<u>Ex.15</u> Fie dat AB=12 cm, BC=8 cm, AD=40 cm. Aratati ca daca A,B,C,D sunt puncte coliniare, in aceasta ordine atunci C este mijlocul lui (AD).

<u>Ex.16</u> Fie punctele coliniare A,B,C,D, in aceasta ordine si M mijlocul lui [AB], C este mijlocul lui (BD), astfel incit AM=20 cm, BD=60 cm. Stiind ca P este mijlocul lui [AC], iar Q mijlocul lui [CD] aflati lungimea segmentului PQ.

UNGHIUL

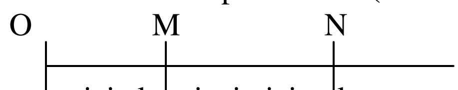
Definitii: Unghiul este figura geometrica formata de doua semidrepte cu aceeasi origine.

• Daca cele doua semidrepte care formeaza un unghi sunt semidrepte opuse, atunci unghiul se numeste **unghi alungit** sau **cu laturile in prelungire(unghiul format de o dreapta)**.



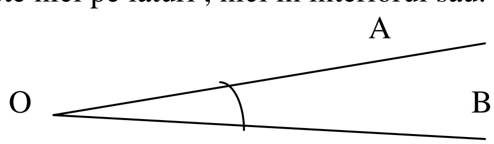
$\angle AOB$ este unghi alungit

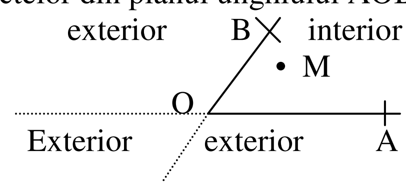
• Un unghi format din doua semidrepte identice**(o semidreapta)** se numeste **unghi nul**.



$\angle MON$ este unghi nul

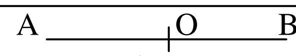
• Un unghi care nu este nici alungit si nici nul se numeste unghi propriu.
• Interiorul unui unghi propriu AOB este multimea punctelor M din planul unghiului AOB a.i. M si B sunt de aceeasi parte a dreptei OA si M si A sunt de aceeasi parte a dreptei OB.
• Exteriorul unghiului propriu AOB este multimea punctelor din planul unghiului AOB care nu este nici pe laturi , nici in interiorul sau.



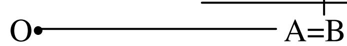


Numarul de grade ale unui unghi se numeste masura sa ; un semicerc are 180^0.
Daca $\angle AOB$ are **n** grade, scriem $m(\angle AOB) = n$ (este a n-a parte dintr-un semicerc)

- Unghiul cu laturile in prelungire are 180°.



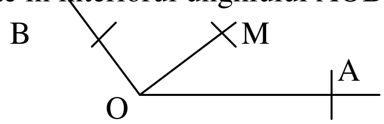
- Unghiul nul are 0°.



- Doua unghiuri cu masuri egale sunt congruente si reciproc, doua unghiuri congruente au masuri egale.
- Un grad are 60 de minute
- Un minut are 60 de secunde.

Axioma de adunare a unghiurilor

Daca M este in interiorul unghiului AOB atunci $m(\angle AOB) = m(\angle AOM) + m(\angle MOB)$



- Pentru a aduna masurile a doua unghiuri exprimate in grade, minute si secunde se aduna numerele care reprezinta unitati de acelasi fel (grade, minute, secunde). Daca numarul minutelor sau secundelor obtinute este mai mare de 60 se transforma in unitati mai mari.

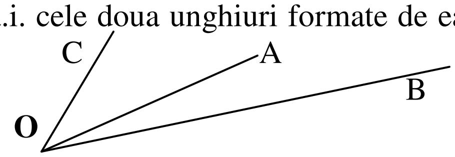
Exemplu: $12^\circ 35' 47'' + 18^\circ 45' 43'' = 30^\circ 80' 90'' = 30^\circ 81' 30'' = 31^\circ 21' 30''$

- Pentru a scadea masurile a doua unghiuri expr. in grade, minute si secunde se scad numerele care reprezinta unitati de acelasi fel. Daca nr. de min. sau sec. de la descazut este m.mic decât cel de la scazator, se transforma un grad in minute sau un minut in secunde si se adauga la cele existente, apoi se efectueaza scaderea.

Exemplu: a) $24^\circ 35' 27'' - 14^\circ 10' 15'' = 10^\circ 25' 12''$ b) $23^0 - 15^0 32' = 22^0 60' - 15^0 32' = 7^0 28'$

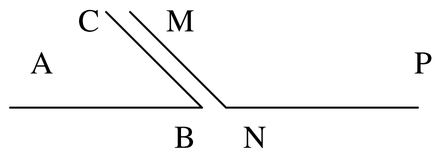
c) $17^\circ 23' 28'' - 12^\circ 30' 25'' = 16^\circ 83' 28'' - 12^\circ 30' 25'' = 4^\circ 53' 3''$

- Doua unghiuri proprii care au vârful comun , o latura comuna, iar celelalte doua sunt situate de o parte si de alta a dreptei care contine latura comuna, se numesc **<u>unghiuri adiacente</u>. <AOC si <AOB, au latura [OA comuna, iar laturi necomune [OC si [OB**
- Se numeste **<u>bisectoarea</u>** unui unghi propriu semidreapta cu originea in vârful unghiului, situata in interiorul lui, a.i. cele doua unghiuri formate de ea cu laturile unghiului initial sa fie congruente.



<AOC≡<AOB

Doua unghiuri proprii pentru care suma masurilor este 180°, se numesc unghiuri suplementare. Fiecare dintre cele doua unghiuri se numeste suplementul celuilalt.

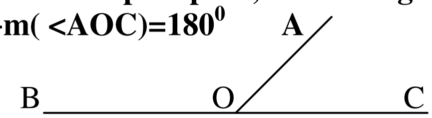


$m(\angle ABC)+m(\angle MNP)=180^\circ$

Unghiurile ABC si MNP sunt suplementare

$\angle ABC$ este suplementul $\angle MNP$ si invers.

Daca laturile necomune a doua unghiuri adiacente sunt semidrepte opuse, atunci unghiurile sunt suplementare. <AOB si <AOC, deci m(<AOB) +m(<AOC)=180^0



Teorema suplementului

Teorema: Daca doua unghiuri sunt congruente, atunci si suplementele lor sunt congruente

Ipoteza:1. $\angle A \equiv \angle B$ **2.** $\angle A_1$ suplementul $\angle A$ 3. $\angle B_1$ suplementul $\angle B$

Concluzie: $\angle A_1 \equiv \angle B_1$ **Demonstratie**

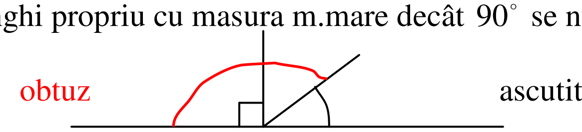
AFIRMATII	EXPLICATII
1. $\angle A \equiv \angle B$	1. Dat in ipoteza(i1)
2. $m(\angle A) = m(\angle B)$	2. Unghiurile congruente au masuri egale
3. $m(\angle A)+m(\angle A_1)=180^\circ$	3. Definitia unghiurilor suplementare(i2)
4. $m(\angle B)+m(\angle B_1 = 180^\circ$	4. Definitia unghiurilor suplementare(i3)
5. $m(\angle A)+m(\angle A_1)=m(\angle B)+m(\angle B_1)$	5. Din afirmatia 3 si 4
6. $m(\angle A_1)=m(\angle B_1)$	6. Scaderea egalitatilor 5. si 2.
7. $\angle A_1 = \angle B_1$	7. Unghiurile cu masuri egale sunt congruente(af.6).

Alta teorema : Doua unghiuri care au acelasi suplement sunt congruente.

Fie m(<A)+m(<C)=180^0, iar m(<B)+m(<C)=180^0, rezulta **<A**≡<B

<u>Definitii:</u>

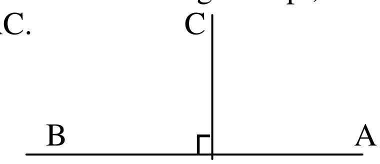
1. Se numeste **unghi drept** orice unghi care este congruent cu suplementul sau(are 90^0).
2. Daca suma masurilor a doua unghiuri proprii este 90° atunci ele se numesc **<u>complementare</u>**, iar fiecare dintre ele se numeste **complement** al celuilalt.
   - Un unghi propriu cu masura m.mica decât 90° se numeste **unghi ascutit**
   - Un unghi propriu cu masura m.mare decât 90° se numeste **unghi obtuz.**



Teorema complementului

Daca doua unghiuri sunt congruente, atunci complementele lor sunt congruente.
Fie <A≡<B si m(<A)+m(<C)=90^0, iar m(<B)+m(<D)=90^0, rezulta <C≡<D
Doua unghiuri care au acelasi complement sunt congruente.
Fie m(<A)+m(<C)=90^0, iar m(<B)+m(<C)=90^0, rezulta **<A**≡<B

- Daca AB si AC formeaza un unghi drept, atunci ele se numesc **drepte perpendiculare** si se noteaza AB $\perp$ AC.



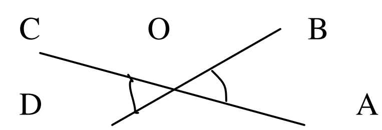
Daca doua unghiuri sunt complementare, atunci amândoua sunt ascutite.
Consecinta C-1: Orice doua unghiuri drepte sunt congruente.
C-2: Daca doua unghiuri sunt congruente si suplementare, atunci fiecare dintre ele este drept.

Definitii:

Doua unghiuri proprii se numesc **opuse la vârf** daca laturile lor formeaza doua drepte concurente.

Teorema unghiurilor opuse la vârf

Unghiurile opuse la vârf sunt congruente
Ipoteza : <AOB si $\angle COD$ sunt opuse la vârf.
Concluzie : $\angle AOB \equiv \angle COD$



Demonstratie :

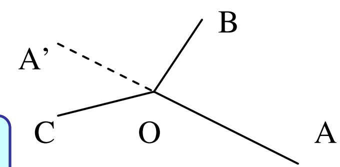
Demonstratie

AFIRMATII	EXPLICATII
1. $\angle AOB si \angle COD$ sunt opuse la vârf	1. Dat in ipoteza
2. <[OA si [OC; [OB si [OD semidr. opuse	2. Definitia unghiurilor opuse la vârf
3. <AOB si <BOC sunt suplementare(180^0)	3.4.Unghiuri adiacente cu lat. necomune semidrepte opuse
4. $\angle COD si \angle BOC$ sunt suplementare(180^0)	
5. m(<AOB)+m(<BOC)=m(<COD)+m(<BOC deci m(<AOB)≡m(<COD)+m(<BOC)-m(<BOC) rezulta m(<AOB)=m(<COD)	5. Reflexivitatea congruentei
6. <AOB≡<COD	6. Teorema suplementului

Definitii:

Trei sau mai multe unghiuri care au vârful comun, nu au puncte interioare commune si care, impreuna cu interioarele lor, acopera intreg planul, se numesc **unghiuri in jurul unui punct**.

Teorema unghiurilor in jurul unui punct



Suma masurilor unghiurilor in jurul unui punct este 360°

Dem:

Fie A’ pe OA, interior <BOC

$m(\angle BOC) = m(\angle BOA') + m(\angle A'OC)$

<AOB si <BOA’ sunt adiacente

<A’OC si <COA sunt adiacente

[OA’ si [OA sunt opuse

<AOB si <BOA’ sunt suplementare

<A’OC si <COA sunt suplementare

$m(\angle AOB) + m(\angle BOA') = 180^\circ$

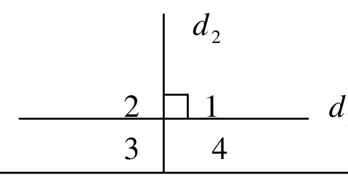
$m(\angle A'OC) + m(\angle COA) = 180^\circ$

$m(\angle AOB) + m(\angle BOA') + m(\angle A'OC) + m(\angle COA) = 360^\circ$

$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COA) = 360^\circ$

Teorema:

Daca la intersectia a doua drepte distincte si concurente se formeaza un unghi drept, atunci toate unghiurile care se formeaza sunt unghiuri drepte.



Demonstratie :

1. < 1 este drept(ip)(<1=90^0)
2. <1 si < 3 sunt opuse la vârf
3. deci, <3=<1=90^0(<3 este drept)
4. <1 si < 2 sunt suplementare

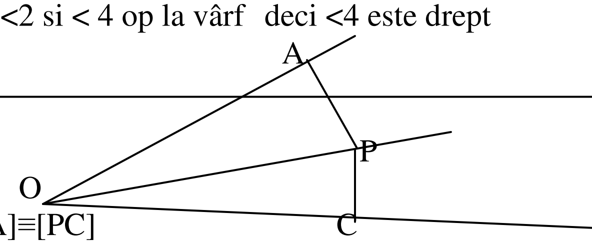
5.deci $m(\angle 2) + 90^\circ = 180^\circ$

6.rezulta $m(\angle 2) = 90^\circ$

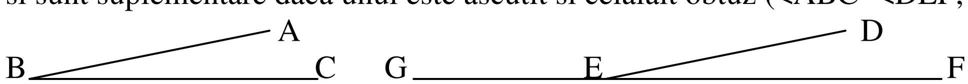
7. <2 si < 4 op la vârf deci <4 este drept

Tr.Orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal departat de laturile unghiului.

Fie PA ⊥ OA si PC ⊥ OC si [OP=bis, rezulta [PA]≡[PC]

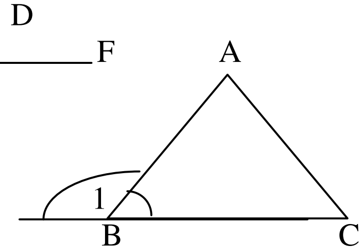


Tr.Doua unghiuri cu laturile paralele sunt congruente daca sunt ambele ascutite sau ambele obtuze si sunt suplementare daca unul este ascutit si celalalt obtuz (<ABC≡<DEF; <ABC+<GED=180^0).



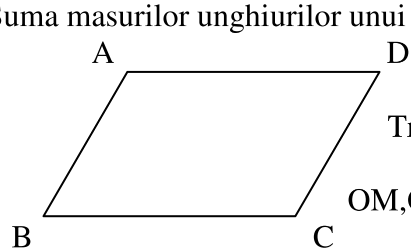
Tr.Unghiul exterior al unui triunghi este egal cu suma masurilor unghiurilor nealaturate lui.

<1+<B=180^0 si <B+<C+<A=180^0, deci <1=<C+<A



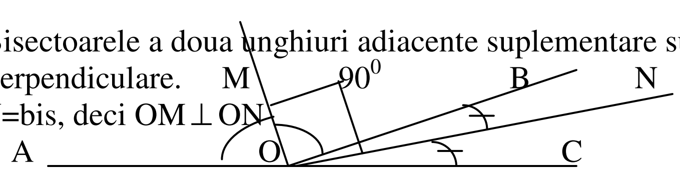
Tr.Suma masurilor unghiurilor unui patrulater este 360^0.

<A+<B+<C+<D=360^0



Tr. Bisectoarele a doua unghiuri adiacente suplementare sunt perpendiculare.

OM,ON=bis, deci OM ⊥ ON



<u>Ex.1</u> **Fie m(<A)=75^0 , m(<B)=105^0, m(<C)=25^0 30' ,m(<D)=37^0 32' m(<E)=$27^0$45'32" . Se cere sa calculati : m(<A) +m(<B), m(<A) +m(<C), m(<E) +m(<B), m(<A) +m(<C) +m(<E), m(<B) -m(<A), m(<A) -m(<C), m(<A) -m(<E), m(<E) -m(<C)**

<u>Ex.2</u> **Fie m(<A)=45^0 , m(<B)=10^0 si <C complementul lui A, iar <D complementul lui D .Se cere sa calculati : m(<C) +m(<D).**

<u>Ex.3</u> **Fie m(<A)=52^0 , m(<B)=70^0 si <C suplementul lui A, iar <D suplementul lui D .Se cere sa calculati : m(<C) +m(<D).**

<u>Ex.4</u> **Fie <AOB si <BOC doua unghiuri adiacente complementare, iar [OM si [ON bisectoarele lor. Stiind ca m(<MOB)=20^0 se cere sa calculati : m(<MON) si m(<BOC).**

<u>Ex.5</u> **Fie <AOB si <BOC doua unghiuri adiacente suplementare, iar [OM si [ON bisectoarele lor. Stiind ca m(<CON)=60^0 se cere sa calculati : m(<MON) si m(<AOB).**

<u>Ex.6</u> **Fie <AOB si <BOC doua unghiuri adiacente complementare. Cite grade are unghiul dintre bisectoarele lor ?**

<u>Ex.7</u> **Fie <AOB si <DOC doua unghiuri opuse la virf, iar [OM si [ON bisectoarele lor. Aratati ca punctele M,O si N sunt coliniare.**

<u>Ex.8</u> **Fie <AOB si <BOC doua unghiuri adiacente complementare, iar raportul masurilor lor este 2/3. Aflati masura unghiurilor date.**

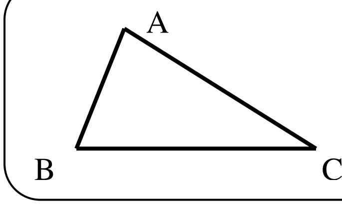
<u>Ex.9</u> **Fie <AOB un unghi alungit si <DOC un unghi drept, iar [OM si [ON bisectoarele unghiurilor AOD, respectiv COB. Se cere sa calculati m(<MON) .**

<u>Ex.10</u> **Fie <AOB, <BOC, <COD, <DOE, <EOF unghiuri in jurul punctului O, iar [OM si [ON bisectoarele unghiurilor EOF si EOD. Stiind ca MO$\perp$ON si ca E,O si B sunt puncte coliniare aratati ca punctele F,O si D sunt coliniare si ca <BOF≡<EOD.**

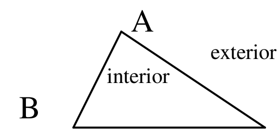
TRIUNGHIUL

Definitii:

Daca A,B si C sunt trei puncte necoliniare, distincte doua câte doua, atunci ($\Rightarrow$) $[AB] \cup [AC] \cup [BC]$ se numeste **triunghi** si se noteaza cu **ΔABC.**



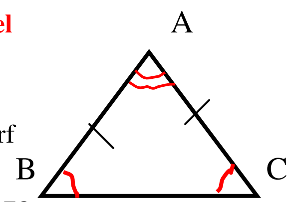
Orice **ΔABC** determina trei unghiuri:<BAC, <ABC, <ACB
Acestea se numesc unghiurile triunghiului ABC.



Perimetrul unui triunghi este suma lungimilor laturilor

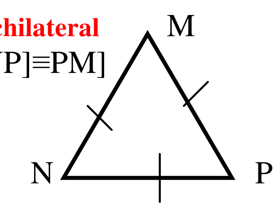
Un punct este in **interiorul** unui triunghi daca este in interiorul fiecaruia din unghiurile triunghiului.
Un punct este in **exteriorul** triunghiului daca este in planul acestuia, dar nu este nici pe triunghi si nici in interiorul lui.

ΔABC este **isoscel**
[AB]≡[AC]
[BC] baza
<BAC unghi la vârf
<ABC si <ACB
unghiuri de la baza

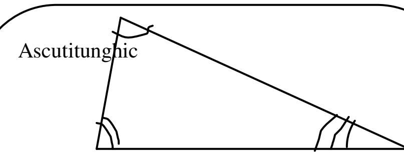


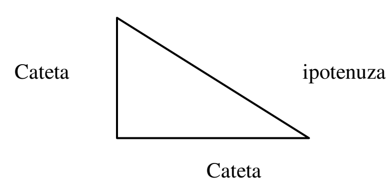
Un triunghi cu doua laturi congruente se numeste **<u>isoscel ; cea de-a treia</u>** latura se numeste baza.
Cele doua <alaturate bazei se numesc **<de la baza**.
Unghiul opus bazei se numeste **<de la vârf**.
Un triunghi cu toate laturile congruente se numeste **<u>echilateral</u>.**
Un triunghi in care orice doua laturi nu sunt congruente se numeste **<u>oarecare</u>** sau **<u>scalen</u>.**

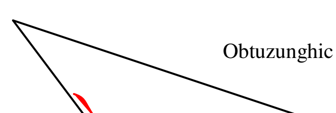
ΔMNP **echilateral**
[MN]≡[NP]≡PM]



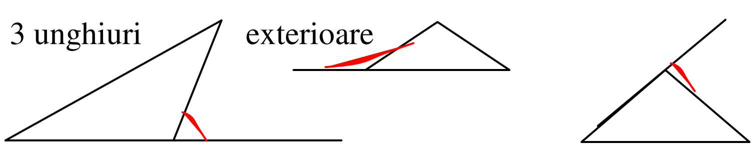
Daca un triunghi are toate unghiurile ascutite, el se numeste **triunghi ascutitunghic**.
Daca un triunghi are un unghi drept, el se numeste **triunghi dreptunghic**. Latura care se opune unghiului drept se numeste ipotenuza, iar celelalte doua se numesc catete.
Daca un triunghi are un unghi obtuz, el se numeste **obtuzunghic**.
Un unghi adiacent si suplementar unui unghi al unui triunghi se numeste **unghi exterior** al triunghiului.







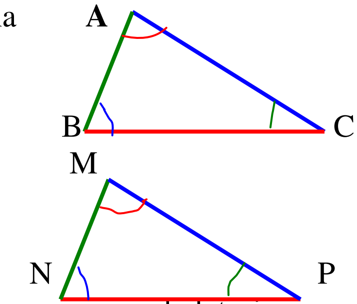
3 unghiuri exterioare



Intr-un triunghi suma lungimilor oricaror doua laturi este m.mare decât lungimea laturii a treia.
Suma masurilor unghiurilor unui triunghi este 180°; intr-un patrulater suma unghiurilor este 360^0

Congruenta triunghiurilor

ΔABC este congruent cu **ΔMNP, notat ΔABC≡ΔMNP,** inseamna sase congruente (sau egalitatile corespunzatoare lor):



[AB]≡[MN]	sau	AB≡MN
[AC] ≡[MP]	sau	AC≡MP
[BC] ≡[NP]	sau	BC≡NP
<BAC≡<NMP	sau	m(<BAC) ≡m(<NMP)
<ABC≡<MNP	sau	m(<ABC) ≡m(<MNP)
<ACB≡<MPN	sau	m(<ACB) ≡m(<MPN)

Elemente omoloage : 2 laturi care se opun la unghiuri ≡, sau 2 < care se opun la laturi ≡
Atentie la ordinea in care scriem literele cf. el.omoloage, **ΔABC≡ΔMNP si nu altfel**

Criteriile de congruenta a triunghiurilor

1) **L.UL.**	Latura-unghi-latura
2) **U.L.U.**	Unghi-latura-unghi
3) **L.L.L.**	Latura-latura-latura
L.U.U.	Latura-unghi-unghi

Cazul 1. (L.U.L)

Doua triunghiuri sunt congruente daca au doua laturi si unghiurile dintre ele respectiv congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, [AB] ≡ [MN], [BC] ≡ [NP] si <ABC ≡ <MNP, rezulta conform cazului LUL ca ΔABC ≡ ΔMNP, deci [AC] ≡[MP], <BAC ≡ <NMP, <ACB ≡ <MPN

Cazul 2. (U.L.U)

Doua triunghiuri sunt congruente daca au cite o latura si unghiurile alaturate ei respectiv congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, [AB] ≡ [MN], <BAC ≡ <NMP si <ABC ≡ <MNP, rezulta conform cazului ULU ca ΔABC ≡ ΔMNP, deci [AC] ≡[MP], [BC] ≡ [NP], <ACB ≡ <MPN

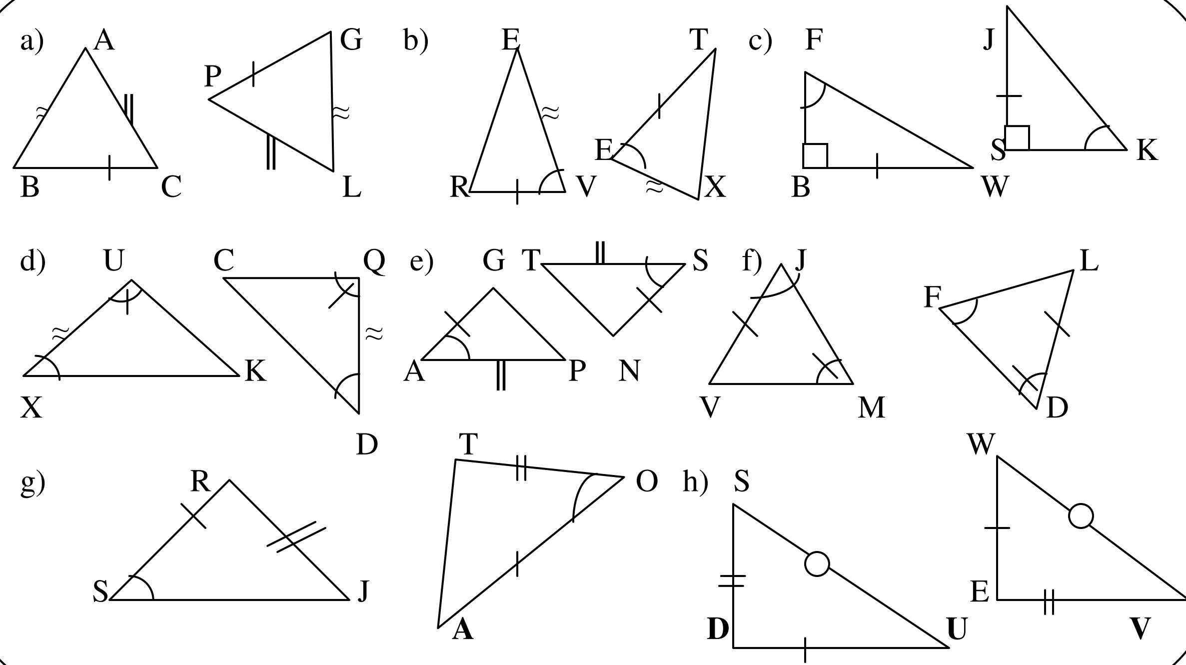
Cazul 3. (L.L.L)

Doua triunghiuri sunt congruente daca au laturile respectiv congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, [AB] ≡ [MN], [BC] ≡ [NP] si [AC] ≡ [MP], rezulta conform cazului LLL ca ΔABC ≡ ΔMNP, deci <ABC ≡<MNP, <BAC ≡ <NMP, <ACB ≡ <MPN

Cazul 4. (L.U.U)

Doua triunghiuri sunt congruente daca au cite o latura si doua unghiuri respectiv congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, [AB] ≡ [MN], <BAC ≡ <NMP si <ACB ≡ <MPN, rezulta <ABC ≡ <MNP deoarece suma unghiurilor intr-un triunghi este 180^0 , deci conform cazului ULU avem ΔABC ≡ ΔMNP, deci [AC] ≡[MP], [BC] ≡ [NP], <ABC ≡ <MNP.

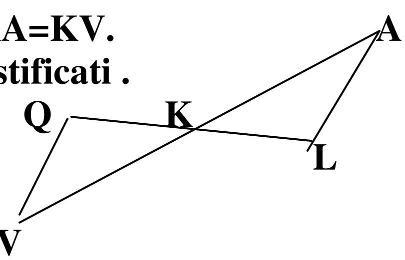
Ex.1 Elementele congruente sunt marcate, se cere sa spuneti **cazul de** ≡ si sa scrieti corect ≡**Δ**



Ex.2. **Stim ca ΔARB ≡ ΔMGF. Scrieti toate congruentele de unghiuri si laturi care rezulta, desenati si marcati elementele congruente.**

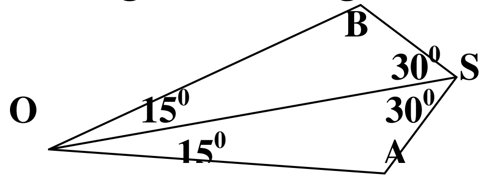
Ex.3. **Congruenta ΔABC ≡ ΔABC este adevarata pentru orice triunghi, dar congruenta ΔABC ≡ ΔACB este adevarata in orice triunghi ?**

Ex.4. **Pe figura alaturata stim ca QK=KL, KA=KV. Cele doua triunghiuri sunt congruente ? Justificati .**



Ex.5. **Daca sunt adevarate simultan congruentele, ΔABC ≡ ΔACB si ΔCAB ≡ ΔCBA, atunci ce fel de triunghi este ΔABC ?**

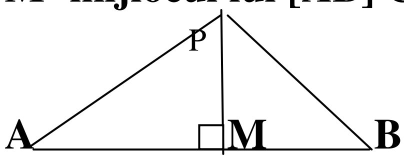
Ex.6. **De ce sunt congruente triunghiurile din figura alaturata ?**



Metoda triunghiurilor congruente

Pentru a dovedi ca doua segmente (sau doua unghiuri) sunt congruente, cautam sa incadram segmentele (sau unghiurile) respective in doua triunghiuri, a caror congruenta o putem demonstra, a.i. segmentele (unghiurile) de care ne ocupam sa fie elemente omoloage (laturile ≡ se opun la unghiuri ≡, iar unghiurile ≡ se opun la laturi ≡).

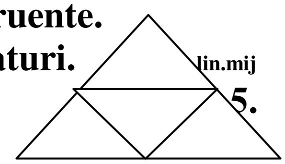
Tr. Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal departat de capetele segmentului. Ipoteza: PM⊥AB, si M=mijlocul lui [AB] Concluzia:[PA]≡[PB]

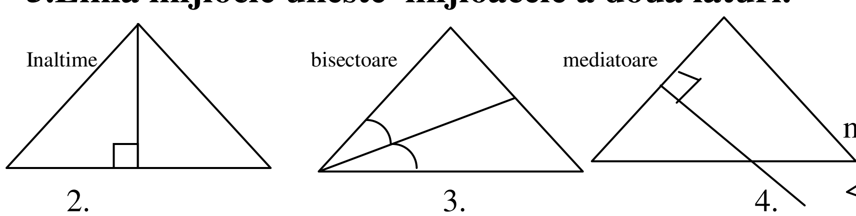


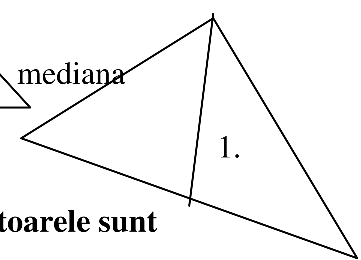
Dem: Folosim metoda triunghiurilor ≡
ΔPMA≡ΔPMB deoarece:
1.[MA]≡[MB](ip.)
2.[PM] latura comuna 3.m(<PMA)=m(<PMB)=90^0
deci conform cazului LUL, ΔPMA≡ΔPMB, rezulta [PA]≡[PB]

Linii importante in triunghi :

1.Mediana uneste virful cu mijlocul laturii opuse.
2.Inaltimea este perpendiculara dusa dintr-un virf pe latura opusa.
3.Bisectoarea imparte unghiul in doua unghiuri congruente.
4.Mediatoarea este perpendiculara pe mijlocul unei laturi.
5.Linia mijlocie uneste mijloacele a doua laturi.



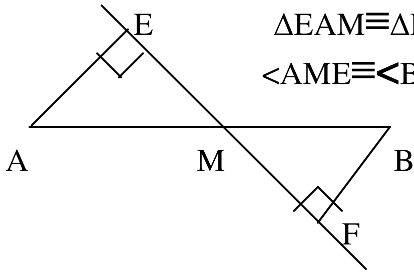




In orice triunghi medianele, inaltimile, bisectoarele, mediatoarele sunt concurente(trec prin acelasi punct).
Medianele se intersecteaza la 2/3 de virf si 1/3 de baza, intr-un punct numit centrul de greutate al triunghiului(G) sau baricentrul triunghiului.
Punctul de intersectie al mediatoarelor(O) este centrul cercului circumscris triunghiului.
Punctul de intersectie al bisectoarelor(I) este centrul cercului inscris in triunghi.
Punctul de intersectie al inaltimilor(H) se numeste ortocentrul triunghiului.

<u>Ex7</u> O dreapta care trece prin mijlocul unui segment este egal departata de capetele segmentului.

Ipoteza : M=mijlocul lui [AB], AE$\perp$EF, BF$\perp$EF Concluzie: [AE] $\equiv$ [BF]



ΔEAM$\equiv\Delta$FBM cf.cazului LUU, pt.ca [AM]$\equiv$[MB](ip.M mij.[AB]), <AME$\equiv$<BMF(<op.virf), <AEM$\equiv$<BFM (ip.<de 90^0), deci [AE] $\equiv$[BF]

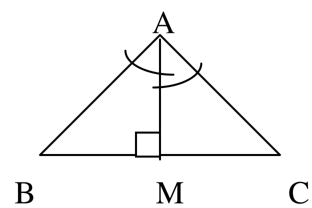
Tr.1 Intr-un triunghi isoscel unghiurile de la baza sunt congruente.

Daca [AB] $\equiv$ [AC] atunci ΔABC$\equiv\Delta$ACB cf.cazului LUL(AB=AC, AC=AB, <BAC$\equiv$<CAB)

Rezulta <ABC$\equiv$<ACB

Consecinta: Intr-un triunghi isoscel unghiurile de la baza sunt ascutite. Rezulta din faptul ca suma <inΔ este 180^0 .

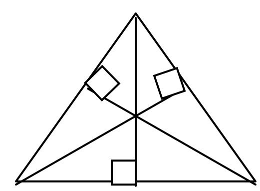
Tr.2 Intr-un triunghi isoscel mediana bazei este si inaltime si bisectoare si mediatoare.



Daca AB$\equiv$AC, MA$\equiv$MC AM=lat.comuna , rezulta cf.cazului LLL ca ΔAMB$\equiv\Delta$AMC, deci <AMB$\equiv$<AMC, dar <AMB+<AMC=180^0, deci <AMB$\equiv$<AMC=90^0

Tr.3 Intr-un triunghi echilateral toate unghiurile sunt congruente si au masura de 60^0.

Ipoteza ΔABC=echilateral, deci AB=BC=AC, rezulta <A=<B<C (Tr.1) .Intr-un Δ suma unghiurilor este 180^0 (v.mai jos), deci <A=<B=<C=180/3=60^0

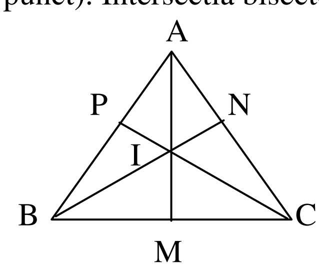


Tr.4 Intr-un triunghi echilateral orice mediana este si inaltime si bisectoare si mediatoare.

Ipoteza ΔABC=echilateral, deci se aplica Tr.2 pt.cele 3 mediane

Tr.5 Intr-un triunghi bisectoarele sunt concurente(trec prin acelasi punct). Intersectia bisectoarelor este centrul cercului inscris in triunghi.

Ipoteza : AM, BN, CP=bisectoare Concluzia: **AM**$\cap$**BN**$\cap$**CP**={I}

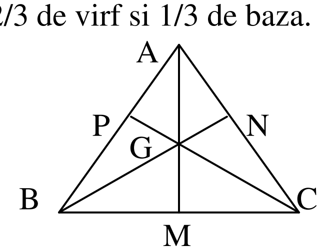


Tr.6 Intr-un triunghi medianele sunt concurente(trec prin acelasi punct). Intersectia medianelor se numeste centrul de greutate sau baricentrul triunghiului si este situat la 2/3 de virf si 1/3 de baza.

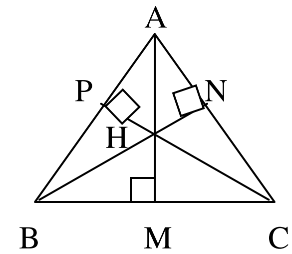
GA=2/3AM, GM=1/3AM , deci AG=2GM, GM=AG/2

GB=2/3BN, GN=1/3BN , deci BG=2GN, GN=BG/2

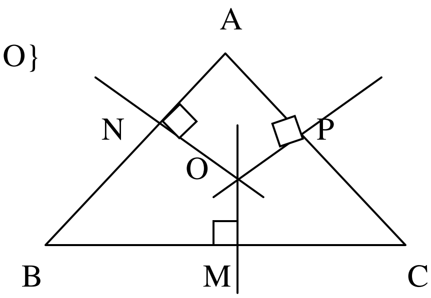
GC=2/3CP, GP=1/3CP , deci CG=2GM, GP=CG/2



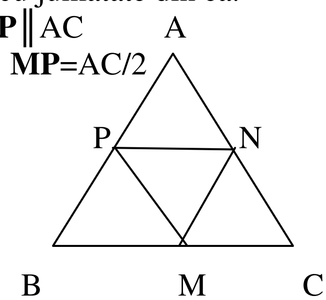
Tr.7 Intr-un triunghi inaltimile sunt concurente(trec prin acelasi punct). Intersectia inaltimilor se numeste ortocentrul(ortos=perpendicular) triunghiului.
Ipoteza : AM, BN, CP=inaltimi Concluzia: $\mathbf{AM}\cap\mathbf{BN}\cap\mathbf{CP}=\{H\}$



Tr.8 Intr-un triunghi mediatoarele sunt concurente(trec prin acelasi punct). Intersectia mediatoarelor este centrul cercului circumscris triunghiului.
Ipoteza : AM, BN, CP=mediatoare Concluzia: $\mathbf{AM}\cap\mathbf{BN}\cap\mathbf{CP}=\{O\}$

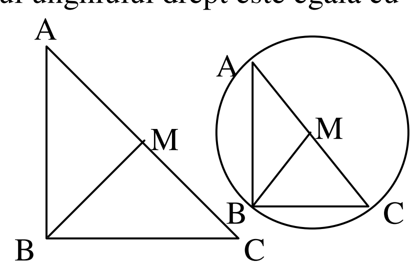


Tr.9 Intr-un triunghi linia mijlocie este paralela cu latura a treia si egala cu jumatate din ea.
Ipoteza : M, N, P=mijloacele laturilor Concluzia: **MN**$\parallel$AB, **NP**$\parallel$BC, **MP**$\parallel$AC
MN=AB/2, **NP**=BC/2, **MP**=AC/2

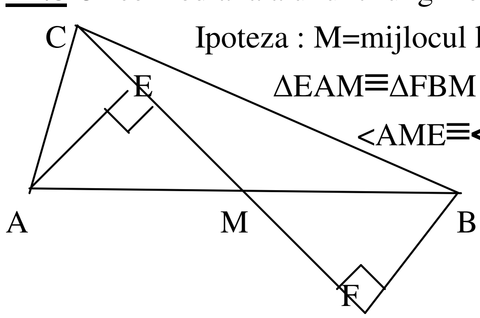


Tr.10 Intr-un triunghi dreptunghic mediana care porneste din virful unghiului drept este egala cu jumatate din ipotenuza.
Ipoteza : M=mijlocul laturii AC
Concluzia : B**M=AC/2**

Deci AM=MC=BM, adica ΔMBA, ΔMBC sunt isoscele.
M este si centrul cercului circumscris ΔABC, iar raza=AC/2
AC este diametru



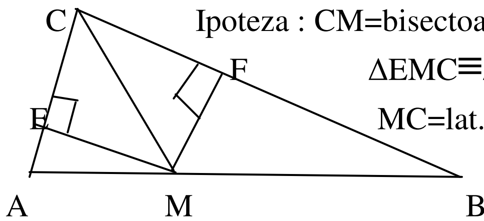
<u>Ex.8</u> Orice mediana a unui triunghi este egal departata de virfurile triunghiului care nu-i apartin.



Ipoteza : M=mijlocul lui [AB], AE$\perp$CM, BF$\perp$CM Concluzie: [AE] $\equiv$ [BF]
ΔEAM$\equiv$ΔFBM cf.cazului LUU, pt.ca [AM]$\equiv$[MB](ip.M mij.[AB]),
<AME$\equiv$<BMF(<op.virf), <AEM$\equiv$<BFM (ip.<de 90^0), deci
[AE] $\equiv$[BF]

Obs. Departare sau distanta inseamna lungimea unei perpendiculare/ducem o perpendicualara.

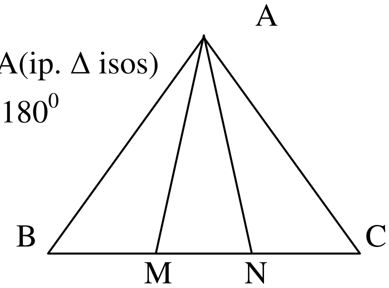
Ex.9 Orice punct de pe bisectoarea unui triunghi este egal departat de laturile triunghiului .



Ipoteza : CM=bisectoarea <ACB, ME ⊥ CA, MF ⊥ CB Concluzie: [ME] ≡ [MF]

ΔEMC≡ΔFMC cf.cazului LUU, pt.ca <MCE≡<MCF](ip.bis), MC=lat.comuna, <CEM≡<CFM (ip.<de 90^0), deci [ME] ≡[MF]

Ex.10 Triunghiurile ABC si AMN sunt isoscele(AB=AC)(AM=AN) , M,N∈ BC. Demonstrati ca BM si CN sunt congruente.

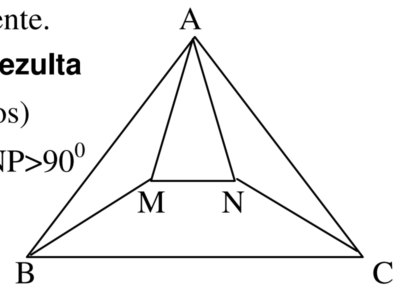


ΔABM≡ΔACN cf.cazului LUU, pt.ca AM=AN si <MBA≡<NCA(ip. Δ isos)

<AMN≡<ANM(ip. Δ isos) si <AMN+<AMB≡<ANM+<ANC=180^0

deci <AMB≡<ANC rezulta BM=CN.

Ex.11 Triunghiurile ABC si AMN sunt isoscele(AB=AC)(AM=AN) , [BM si [CN sunt bisectoarele <B si <C. Demonstrati ca BM si CN sunt congruente.

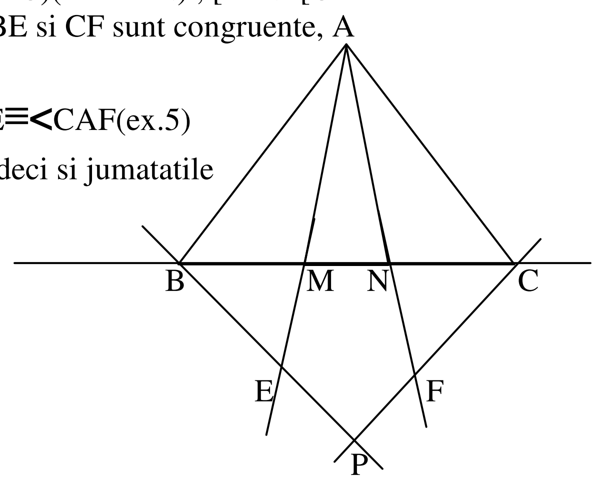


Presupunem ca BM≠CN, deci exista P∈ **[BM astfel incit BP=CN rezulta**

ΔABP≡ΔACN cf.cazului LLL, pt.ca AM=AN si BA≡CA(ip. Δ isos)

Deci AP≡AN rezulta ΔAMP=isoscel, dar <AMB>90^0 deci si <ANP>90^0
deci in ΔAMP suma unghiurilor este >180^0 ceea ce este fals,
rezulta BM=CN.

Ex.12 Triunghiurile ABC si AMN sunt isoscele(AB=AC)(AM=AN) , [BP si [CP sunt bisectoarele <B si <C exterioare. Demonstrati ca BE si CF sunt congruente, unde E∈ **BP**∩AM **iar F∈ CP**∩AN si [BF] ≡**[CE].**



ΔABE≡ΔACF cf.cazului LUU, pt.ca AB=AC si <BAE≡<CAF(ex.5)

Dar <ext.B≡<ext.C (sunt suplementele <int.B si C≡), deci si jumatatile lor sunt ≡, rezulta <ABE≡<ACF
rezulta BE=CF si AE=AF. Deci ΔBCF≡ΔCBE(LUL)
si rezulta BF=CE

Ex.13 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC), si stim ca m(<A)=20^0, iar EB si FC si EF sunt bisectoarele unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC care formeaza ΔEFG.
Ce fel de triunghi este ΔEFG ? Demonstrati ca A, mijlocul lui [BC] si G sunt coliniare.

Ex.14 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC), stim ca m(<A)=20^0, iar EC si FB fac unghiuri de 20^0 cu AC, respectiv AB. Demonstrati ca distantele de la A la EC si FB sunt egale.

Ex.15 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC), ΔABE si ΔACF sunt dreptunghice in A.
Stim ca m(<A)=20^0, iar EB si FC sunt bisectoarele unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC.
Demonstrati ca distantele de la E si F la BC sunt egale.

Ex.16 Triunghiul ABC, dreptunghic in B are m(<A)=30^0. Construim in exteriorul ΔABC, triunghiul echilateral ACD. Fie DE$\perp$ AC, E$\in$**BC, V**$\in$**DE**$\cap$AB, Q este mijlocul lui AE .
Demonstrati ca VQ$\perp$CD, punctele Q,V si C sunt coliniare si EC=AC.

Ex.17 Triunghiul ABC este echilateral, iar D este intersectia dintre perpendiculara in C pe AC si AB. Fie BE perpendiculara pe CD si DF perpendiculara pe BC, iar G intersectia dintre BE si DF.
Demonstrati ca ΔBDC este congruent cu ΔBDG.

Ex.18 Triunghiul ABC este echilateral, iar D este in exteriorul ΔABC astfel incit ΔABE si ΔACD este echilateral. Fie E,F si G trei puncte pe AC, care impart segmentul [AC] in patru segmente congruente. Demonstrati ca [BE] ≡ [DG].

Ex.19 Triunghiul ABC este dreptunghic in A si m(<B)=60^0 , iar M este mijlocul lui [AB].
Ridicam in M perpendiculara pe AB si notam cu N punctul in care ea taie pe BC.
Din M coborim perpendiculara NQ, pe AC . Demonstrati ca ΔMBN ≡ ΔQNC.

Ex.20 Triunghiul ABC este echilateral. Ridicam in A doua perpendiculare pe AB, respectiv pe AC si notam cu F, respectiv E punctele in care ele taie pe BC.
Din B coborim perpendiculara BM, pe AE, iar din C coborim perpendiculara CN, pe AF.
Fie Q si R intersectia dintre MN si AB, respectiv AC, iar P$\in$**BM**$\cap$CN.
Demonstrati ca Q si R sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC ale ΔABC, iar P este egal departat de laturile AB si AC ale ΔABC.

Ex.21 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC), ΔAME si ΔANF sunt echilaterale, M este mijlocul lui [AB] si N mijlocul lui [AC], iar E si F in exteriorul ΔABC. Fie EP$\perp$AB si FP$\perp$AC, iar Q intersectia dintre EB si FC. Demonstrati ca AQ$\perp$BC, [EQ]≡[FQ], AE$\perp$QE, FQ$\perp$**AF.**

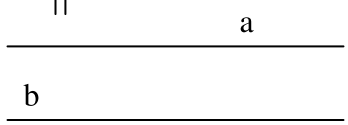
Ex.22 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC), ΔBME si ΔCNF sunt echilaterale, M este mijlocul lui [AB] si N mijlocul lui [AC], iar E si F in exteriorul ΔABC. Fie EP$\perp$AB si FP$\perp$AC. Cum trebuie sa fie ΔABC pentru ca P sa fie pe BC ?

Ex.23 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC), iar BM, BE respectiv CN si CF sunt trisectoarele unghiurilor B si C. Demonstrati ca punctele de intersectie ale trisectoarelor si A sunt coliniare.

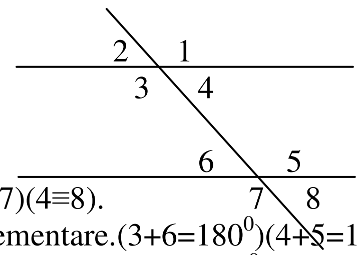
Ex.24 Triunghiul ABC este isoscel(AB=AC, m(<BAC)=20^0), ΔAME, ΔAEF, ΔAFG, ΔAGH, ΔAHI sunt echilaterale si in exteriorul ΔABC, M este mijlocul lui [AB] si N mijlocul lui [AC], iar V este intersectia lui BC cu AF. Fie CR$\perp$ AV, U$\in$ME$\cap$RV si R$\in$AE. Demonstrati ca CV=AB, iar ΔEUR este echilateral.

DREPTE PARALELE

Definitie. Doua drepte coplanare care nu au nici un punct comun sunt paralele.
scriem a$\parallel$ b



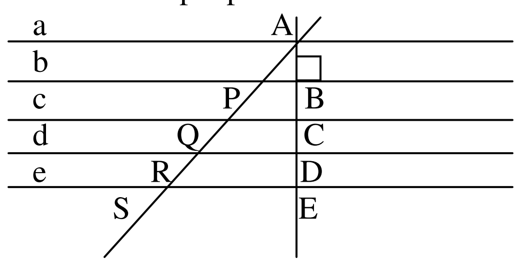
Axioma paralelelor: Printr-un punct exterior unei drepte putem construi doar o paralela la acea dreapta.



Tr.Doua drepte paralele formeaza cu o secanta :

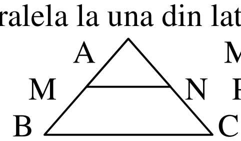
1. Unghiuri alterne interne congruente (3≡5)(4≡6).
2. Unghiuri alterne externe congruente (2≡8)(1≡7).
3. Unghiuri corespondente congruente (2≡6)(1≡5)(3≡7)(4≡8).
4. Unghiuri interne si de aceeasi parte a secantei suplementare.(3+6=180^0)(4+5=180^0)
5. Unghiuri externe si de aceeasi parte a secantei suplementare.(2+7=180^0)(1+8=180^0)

Tr.Mai multe drepte paralele echidistante determina pe orice secanta segmente congruente.



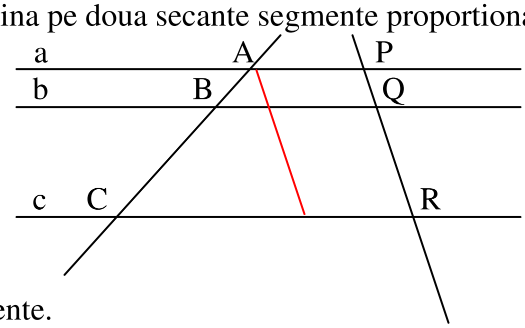
a$\parallel$b$\parallel$c$\parallel$d$\parallel$e si [AB]≡[BC]≡[CD]≡[DE], rezulta [AP]≡[PQ]≡[QR]≡[RS]

Tr.Daca M este mijlocul laturii [AB], iar MN$\parallel$BC, atunci si N este mijlocul lui [AC].
Tr.Thales O paralela la una din laturile unui triunghi formeaza pe celelalte doua segmente proportionale.

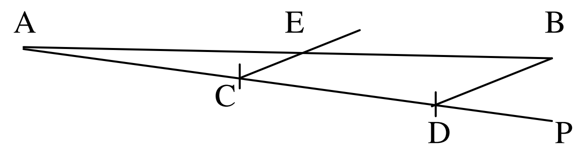


MN$\parallel$BC rezulta AM/MB=AN/NC
Proportii derivate: AM/AB=AN/AC, MB/AB=NC/AC, ...

Tr.Mai multe drepte paralele neechidistante determina pe doua secante segmente proportionale.
a$\parallel$b$\parallel$c rezulta AB/BC≡PQ/QR

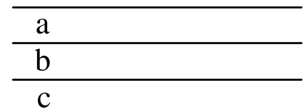


Tr.Cum impartim un segment in doua parti congruente.
-luam in compas o lungime oarecare
-construim dreapta oarecare AP
-cu compasul luam [AC] ≡ [CD] pe dr. AP
-unim D cu B
-ducem CE$\parallel$DB
-conform tr.Thales 1=AC/CD=AE/EB, deci si AE=EB

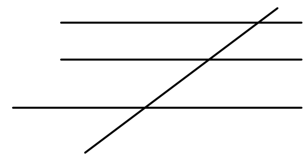


Tr.Cum impartim un segment dat in n parti congruente :
-ca mai sus, dar in loc sa luam pe AP, 2 segmente ≡ , luam n segmente ≡
Tr.Linia mijlocie a triunghiului este paralela cu latura a treia si egala cu jumatate din ea.
-daca MN este linie mijlocie in **Δ**ABC(M si N sunt mijloacele laturilor **ΔABC**) atunci MN$\parallel$BC si MN=BC/2(vezi desenul de la tr.Thales).

Tr.Doua drepte paralele cu o a treia dreapta sunt paralele intre ele.
a$\parallel$b si b$\parallel$c , atunci si a$\parallel$c

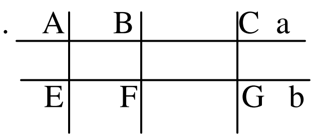


Tr.Daca dreapta a intersecteaza dreapta b intr-un punct, atunci ea intersecteaza orice paralela la dreapta b tot intr-un punct.

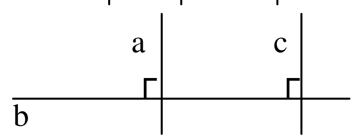


Tr. Daca dreapta a $\perp$ b , atunci ea este perpendiculara pe orice paralela la dreapta b.

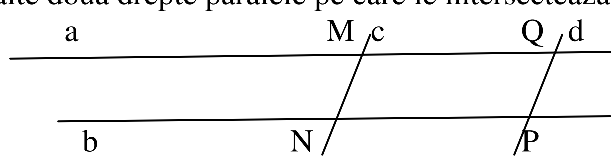
Tr.Distanta dintre doua drepte paralele este constanta(este mereu aceeasi).
AE $\perp$a, AE$\perp$b, BF$\perp$a, BF$\perp$b, CG$\perp$a, CG$\perp$b
Concluzia : AE=BF=CG =...



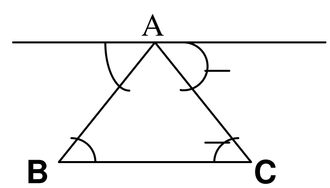
Tr. Daca dreapta a $\perp$ b si c$\perp$ b, atunci a este paralela cu dreapta c.
(Doua drepte perpendiculare pe a treia sunt paralele intre ele)



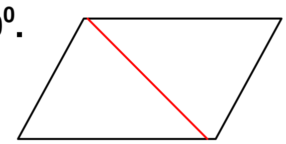
Tr.Doua drepte paralele determina pe alte doua drepte paralele pe care le intersecteaza segmente congruente.
a$\parallel$b si c$\parallel$d, rezulta MN=PQ



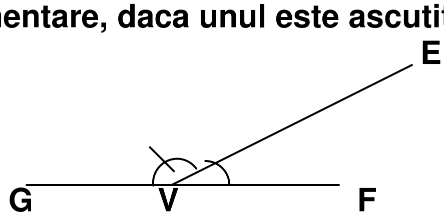
Tr. In orice triunghi suma unghiurilor este egala cu 180^0.
Ducem prin A o paralela la BC, astfel <B si <C sunt alterne interne cu cele doua < de sus care impreuna cu A au 180^0

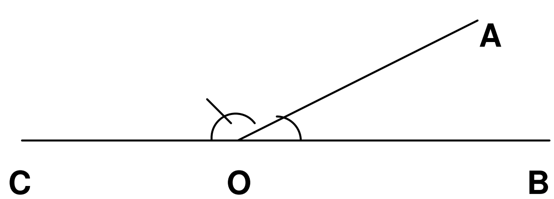


Tr. Intr-un patrulater convex suma unghiurilor este egala cu 360^0.
Ducem diagonala si apar 2 triunghiuri...



Tr. Doua unghiuri cu laturile paralele sunt congruente daca sunt de acelasi fel, adica ambele ascutite sau ambele obtuze, si suplementare, daca unul este ascutit, iar celalalt obtuz. Ip. OA$\parallel$EV si BC$\parallel$GF
<AOB≡<EVF ; <AOC≡<EVG
<AOB+<EVG=180^0 ; <AOC+<EVF=180^0





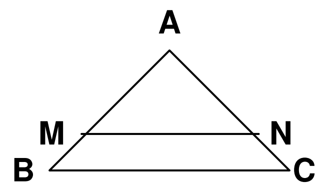
Asemanarea triunghiurilor

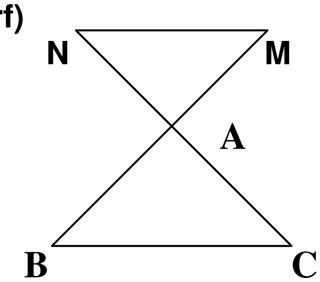
<u>Def.</u> Spunem ca doua triunghiuri sunt asemenea daca au unghiurile congruente si laturile omoloage(laturi care se opun la unghiuri≡) proportionale.

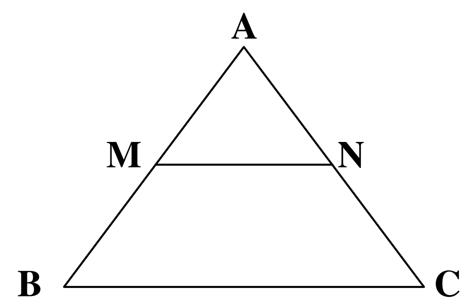
Spunem ca ΔABC este asemenea cu ΔMNP si scriem ΔABC~ ΔMNP, daca sunt adevarate 3 congruente si un sir de 3 rapoarte egale: <A≡<M, <B≡<N, <C≡<P (in aceasta ordine le-am scris ΔABC~ ΔMNP, ca elemente omoloage) si AB/MN=BC/NP=AC/MP.

Obs. O proprietate a sirului de rapoarte este des folosita si anume, oricare raport din sir este egal si cu suma numaratorilor pe suma numitorilor, adica a/x=b/y=c/z=(a+b+c)/(x+y+z).
In cazul nostru AB/MN=BC/NP=AC/MP=(AB+BC+AC)/(MN+NP+MP)=(perimetrul ΔABC)/(perimetrul ΔMNP)

<u>Tr.</u>(Teorema Fundamentala a Asemanarii=TFA)
O paralela la una din laturile unui triunghi formeaza cu celelalte doua un triunghi asemenea cu cel dat.
Ipoteza: MN║BC Concluzia: ΔABC~ ΔAMN
(Concluzia: AM/AB=AN/AC=MN/BC si <B≡<M, <C≡<N)
<BAC≡<MAN (<com/<op.virf)







<u>Ex.1</u> De exemplu daca ΔABC~ ΔAMN si AB=12, BC=8, AC=24, iar perimetrul ΔAMN este egal cu 11 atunci din proportionalitatea laturilor avem AB/MN=BC/NP=AC/MP=(AB+BC+AC)/(MN+NP+MP)=44/11=4, deci AB/MN=4, rezulta MN=AB/4=12/4=3, etc... aflam astfel laturile ΔAMN.

<u>Ex.2</u> Daca ΔABC~ ΔAMN si ΔABC este echilateral atunci si ΔAMN este echilateral pentru ca au unghiurile congruente, deci m(<M)=m(<A)=60^0 , m(<N)=m(<B)=60^0 , m(<P)=m(<C)=60^0 , ceea ce inseamna ca ΔAMN este echilateral.

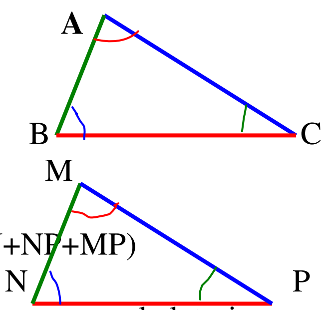
<u>Ex.3</u> Daca ΔABC~ ΔAMN si ΔABC este dreptunghic in A, atunci si ΔAMN este dreptunghic pentru ca au unghiurile congruente, deci m(<M)=m(<A)=90^0 , ceea ce inseamna ca ΔAMN este dreptunghic.

<u>Ex.4</u> Daca ΔABC~ ΔAMN si ΔABC este isoscel(AB=AC), atunci si ΔAMN este isoscel pentru ca au unghiurile congruente, deci m(<N)=m(<B)=m(<C)=m(<P) , ceea ce inseamna ca ΔAMN este isoscel.

<u>Asemanarea triunghiurilor</u>

ΔABC este asemenea cu **ΔMNP, notat ΔABC~ΔMNP,** inseamna
3 congruente si 3 egalitati(rapoartele laturilor omoloage):

<A≡<M sau m(<A)≡m(<M)
<B ≡<N sau m(<B)≡m(<N)
<C ≡<P sau m(<C)≡m(<P)



Proportionalitatea lat.: AB/MN=BC/NP=AC/MP
Sa nu uitati relatia: AB/MN=BC/NP=AC/MP=(AB+BC+AC)/(MN+NP+MP)
Si nici proportiile derivate invatate in clasa 6.
Elemente omoloage : 2 laturi care se opun la unghiuri ≡, sau 2 < care se opun la laturi proportionale .
Atentie la ordinea in care scriem literele cf. el.omoloage, **ΔABC~ΔMNP si nu altfel**

Cazurile de asemanare a triunghiurilor

1) **L.UL.**	Latura-unghi-latura
2) **U.U.**	Unghi-unghi
3) **L.L.L.**	Latura-latura-latura
Laturi proportionale	**Unghiuri ≡**

Cazul 1. (L.U.L)

Doua triunghiuri sunt asemenea daca au doua laturi proprtionale si unghiurile dintre ele congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, AB/MN=BC/NP si <ABC ≡ <MNP, rezulta conform cazului LUL ca ΔABC ~ ΔMNP, deci AB/MN=BC/NP =AC/MP, <BAC ≡ <NMP, <ACB ≡ <MPN

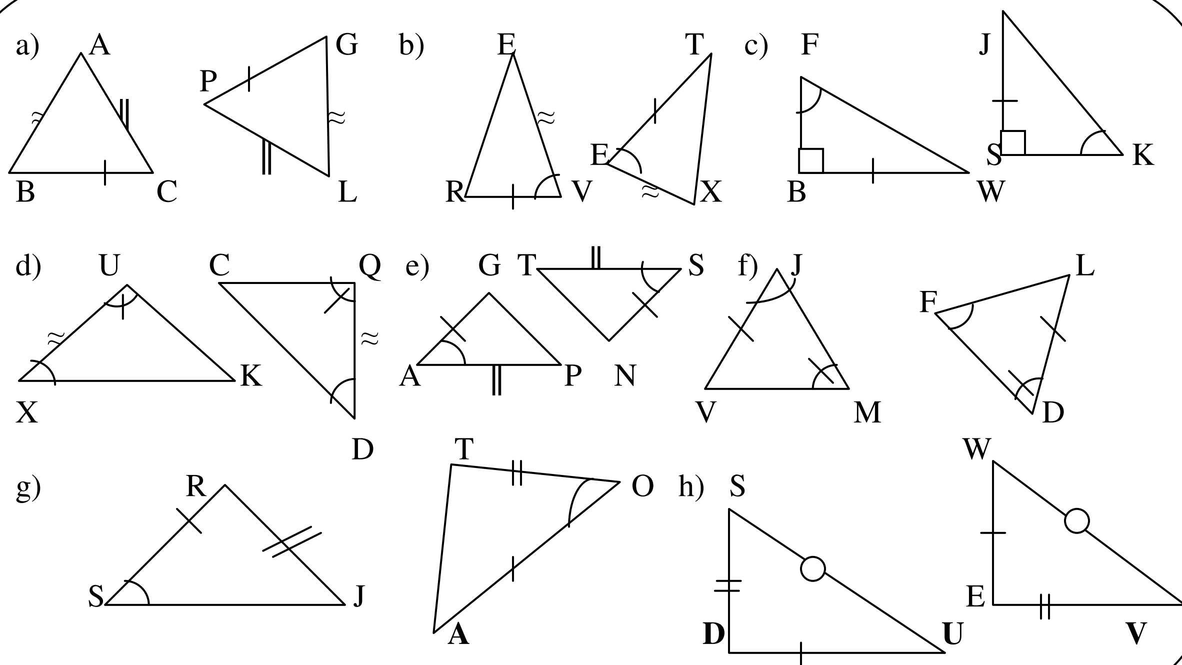
Cazul 2. (U.U)

Doua triunghiuri sunt asemenea daca au cite doua unghiuri congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, <BAC ≡ <NMP si <ABC ≡ <MNP, rezulta conform cazului UU ca ΔABC ~ ΔMNP, deci AB/MN=BC/NP =AC/MP, , <ACB ≡ <MPN

Cazul 3. (L.L.L)

Doua triunghiuri sunt asemenea daca au laturile respectiv proportionale.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, AB/MN=BC/NP =AC/MP,
rezulta conform cazului LLL ca ΔABC ~ ΔMNP, deci <ABC ≡<MNP, <BAC ≡ <NMP, <ACB ≡ <MPN

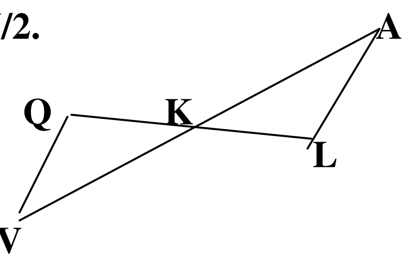
Ex.5 **Elementele congruente/proportionale** **sunt marcate, se cere sa spuneti** **cazul de ~** si sa scrieti corect **~Δ si relatiile corespunzatoare(≡de unghiuri si = de rapoarte)**



Ex.6. **Stim ca ΔARB ~ ΔMGF. Scrieti toate congruentele de unghiuri si proportionalitatea laturilor care rezulta, desenati si marcati elementele congruente/proportionale.**

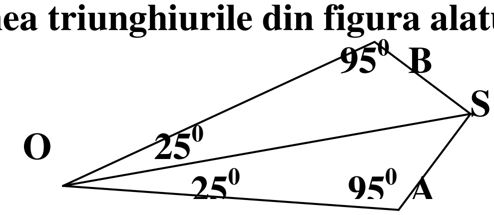
Ex.7. **Stim ca ΔABC este echilateral, iar AE║BC si CE║AB. Demonstrati ca ΔABC ~ ΔACE .**

Ex.8. **Pe figura alaturata QK=2KL, KA=KV/2.**
Care este valoarea raportului AL/QV ?



Ex.9. **Daca ΔABC si ΔEFG sunt dreptunghice atunci este adevarat ca ΔABC ~ ΔEFG ?**

Ex.10. **De ce sunt asemenea triunghiurile din figura alaturata ?**



Ex.11 **Fie ΔABC dreptunghic in A si $m(<C)=30^0$, iar N mijlocul lui [BC]. Fie $NM \perp AB$ si $NQ \perp AC$. Demonstrati ca $m(<MNB)=30^0$, $<MAN \equiv <ANQ$, iar N si Q sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, iar AN=BC/2.**

Ex.12 **Fie ΔABC dreptunghic in A si $m(<C)=30^0$, iar N mijlocul lui [BC]. Fie $NM \perp AB$ si $NQ \perp AC$. Demonstrati ca $m(<MNB)=30^0$, $<MAN \equiv <ANQ$, iar N si Q sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, iar AN=BC/2.**

Ex.13 **Fie ΔABC si E,F doua puncte pe prelungirile laturilor AB respectiv AC, astfel incit AE sa fie o treime din AB, iar AF o treime din AC. Calculati valoarea raportului EF/BC.**

Ex.14 **Fie ΔABC echilateral si H intersectia inaltimilor sale, iar M si N mijloacele segmentelor [HB] respectiv [HC] si E,F punctele unde MN intersecteaza laturile AB respectiv AC. Calculati valoarea raportului EF/BC si MN/BC.**

Ex.15 **Fie ΔABC si O intersectia medianelor sale, iar M si N mijloacele segmentelor [OB] respectiv [OC] si E,F punctele unde MN intersecteaza laturile AB respectiv AC. Calculati valoarea raportului EF/BC si MN/BC.**

Ex.16 **Fie ΔABC si G intersectia medianelor sale, iar $MN \parallel BC$ dusa prin $G(G \in MN)$, unde punctele M,N sunt pe laturile AB respectiv AC. Calculati valoarea raportului MN/BC.**

Ex.18 **Fie ΔABC, ΔAME, ΔANF echilaterale si P intersectia dintre EM si NF, iar M si N mijloacele segmentelor [AB] respectiv [AC] . Demonstrati ca P este pe BC. Calculati valoarea raportului MN/EF.**

Ex.19 **Fie ΔABC echilateral si G intersectia medianelor sale, iar M,N mijloacele laturilor AB si AC. In A ridicam perpendicularele EA si FB pe AC respectiv AB, E fiind intersectia lui CM cu AE, iar F fiind intersectia lui BN cu AF. Fie P si Q punctele unde AE respectiv AF taie BC. Calculati valoarea raportului MN/EF si EF/PQ.**

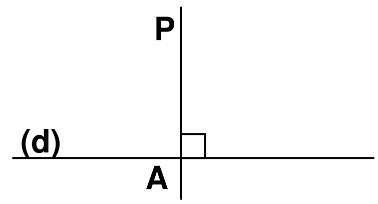
Ex.20 **Fie ABCD un patrat si E,F respectiv ,G,H pe AB respectiv CD astfel incit AE=EF=FB si CG=GH=HD. Fie $EP \perp AC$ si $GQ \perp AC$, S intersectia lui PE cu AD, iar R intersectia lui GQ cu BC. Calculati valoarea raportului PE/GR si AC/PQ, GR/AB.**

Ex.21 **Fie ABCD un patrat si M mijlocul lui AB, iar MNPQ un patrat cu aceeasi latura construit in afara patratului ABCD, E mijlocul lui NP si EFGH un patrat cu aceeasi latura construit in afara patratului MNPQ. Fie R intersectia dintre FG si CQ. Calculati valoarea raportului BQ/FR .**

Ex.22 **Fie ΔABC isoscel cu $m(<A)=30^0$ si M,N mijloacele laturilor AB si AC astfel incit $m(<ABN)=30^0$. Ducem perpendicularele PN pe BN si FA pe NP , P fiind AB, iar F fiind pe NP. Aratati ca ΔPBN este asemenea cu ΔANF si calculati valoarea raportului de asemanare.**

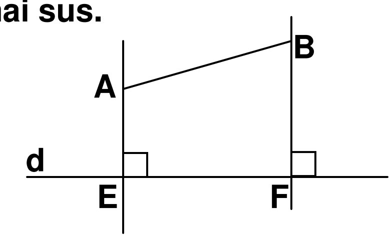
Proiectii. Simetrie.

Definitie: Spunem ca punctul A este proiectia punctului P pe dreapta (d) daca A este piciorul perpendicularei din P pe dreapta d.



$PA \perp d$ si $A \in d$
Notam A=pr(P,d)

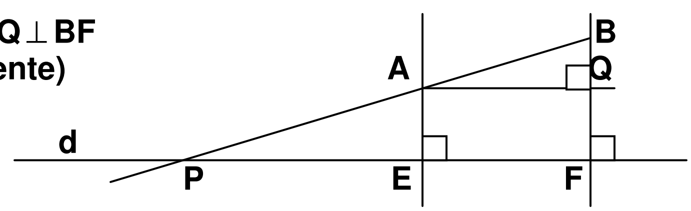
Segmentul [AB] se proiecteaza pe dreapta d ducind din capetele sale perpendicularele pe dreapta d si folosind definitia de mai sus.



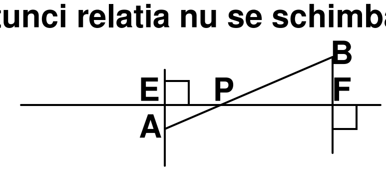
$AE \perp d$ si $BF \perp d$, $E \in d$, $F \in d$
EF este proiectia lui AB pe d si notam EF=pr(AB,d)

Sa gasim acum o relatie intre segmentul dat si proiectia sa pe o dreapta :

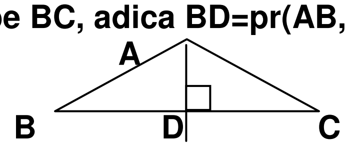
Fie EF=pr(AB,d) si $P \in AB \cap d$ si $AQ \perp BF$
<(AB,d)=<APE=<BAQ(corespondente)
EF=AQ=ABcos(<BAQ)



Rezulta : pr(AB,d)=ABcos(<(AB,d))
Cazuri particulare:
1.Daca AB este paralel cu d atunci <(AB,d)=0 si deci pr(AB,d)=AB, iar segmentul EF are exact lungimea lui AB.
2.Daca AB este perpendicular pe d atunci <(AB,d)=90^0 si deci pr(AB,d)=0 , iar segmentul EF se reduce la un punct, deci E=F.
3.Evident daca $A,B \in d$ atunci proiectia este chiar AB, adica E=A si F=B
4.Daca unul dincapetele segmentului AB este pe dreapta d, de exemplu A, atunci proiectia lui A este chiar A, deci E=A.
5.Daca AB intersecteaza dreapta d intr-un punct P atunci relatia nu se schimba doar trebuie putina atentie la desen.



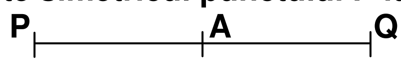
De exemplu, intr-un triunghi ABC, inaltimea AD, determina pe BC segmentele BD si CD care sunt proiectiile lui AB respectiv AC pe BC, adica BD=pr(AB,BC), iar CD=pr(AC,BC).



Ex.23 Se da segmentul AB=10 si dreapta d si unghiul dintre d si dreapta AB de 30^0. Se cere lungimea proiectiei lui AB pe dreapta d.

Ex.24 Se da segmentul EF=20, proiectia lui [AB] pe dreapta d si unghiul dintre d si dreapta AB de 45^0. Se cere lungimea lui [AB] .

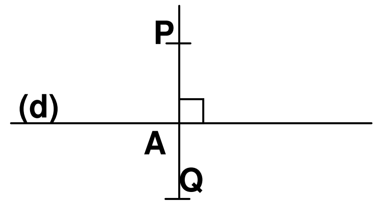
Definitie: Spunem ca punctul Q este simetricul punctului P fata de punctul A daca A este mijlocul lui [PQ].



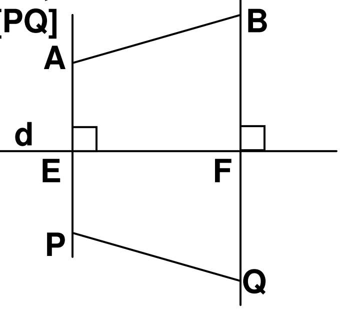
PA=AQ

Definitie: Spunem ca punctul Q este simetricul punctului P fata de dreapta (d) daca A este piciorul perpendicularei din P pe dreapta d, dar si mijlocul lui [PQ], deci d este mediatoarea segmentului [PQ].

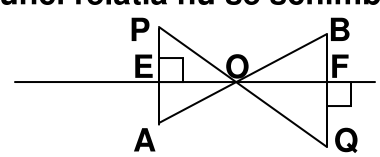
$PA \perp d$ si $A \in d$
AP=AQ=PQ/2



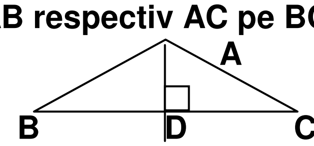
Segmentul [AB] se proiecteaza pe dreapta d ducind din capetele sale perpendicularele pe dreapta d si folosind definitia de mai sus, construim P si Q simetricele lui A, respectiv B fata de dreapta d si obtinem [PQ] simetricul lui [AB] fata de dreapta d.
Fie $AE \perp d$ si $BF \perp d$, $E \in d$, $F \in d$
E=mij.[AP], F=mij.[BQ]
[PQ]=simetricul lui [AB] fata de dreapta d
PQ=AB
In general ABQP este un trapez isoscel



Cazuri particulare:
1.Daca AB este paralel cu d atunci ABQP este dreptunghi sau patrat, iar segmentul AB este paralel cu PQ.
2.Daca AB este perpendicular pe d atunci AB si PQ sunt pe aceeasi dreapta AB perpendiculara pe dreapta d.
3.Evident daca $A,B \in d$ atunci simetricul este chiar AB
4.Daca unul din capetele segmentului AB este pe dreapta d, de exemplu A, atunci P=A, adica P este chiar A.
5.Daca AB intersecteaza dreapta d intr-un punct O atunci relatia nu se schimba doar trebuie putina atentie la desen.



De exemplu, intr-un triunghi isoscel ABC, inaltimea AD, determina pe BC segmentele BD si CD care sunt proiectiile lui AB respectiv AC pe BC, adica AB=simetricul lui AC fata de AD
AD este axa de simetrie, daca indoim desenul dupa AD, ΔABD se suprapune peste ΔACD
ΔABD se vede ca in oglinda/se oglindeste peste ΔACD.



Ex.25 Care sunt axele de simetrie ale unui triunghi echilateral, dar ale unui patrat, dar ale unui dreptunghi, dar ale unui romb, dar ale unui trapez isoscel.

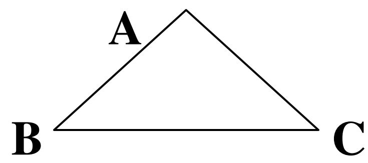
Ex.26 Fie P in interiorul <XOY si M,N simetricele lui P fata de OX si OY. Aratati ca ΔMON este un triunghi isoscel. Ce se intimpla daca $m(\angle XOY)=30^0$ sau 45^0?

FIGURI PLANE FUNDAMENTALE

<u>In orice trunghi :</u>

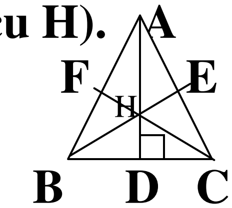
1. Suma unghiurilor este 180^0.

m(<A)+m(<B)+m(<C)=180^0



2.Inaltimile sunt concurente, intersectia lor se numeste ortocentrul triunghiului(se noteaza de obicei cu H).

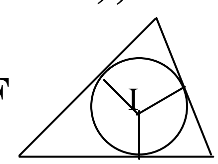
AD⊥BC, BE⊥AC, CF⊥AB

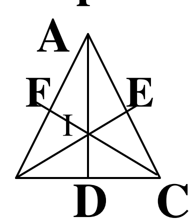


3.Bisectoarele sunt concurente, intersectia lor se numeste centrul cercului inscris in triunghi(notatie:I); este un punct egal departat de laturile triunghiului.

<BAD≡<CAD, <ABE≡<CBE, <ACF≡<BCF

IE=IF=ID=r(raza cercului)



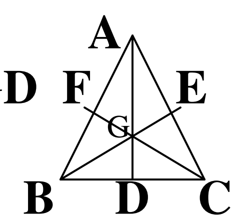


4.Medianele sunt concurente, intersectia lor se numeste centrul de greutate al triunghiului si se afla la 2/3 de virfuri si 1/3 da baza (notatie:G).

D,E,F=mij.lat. GA=2/3AD, GD=1/3AD, AG=2GD

GB=2/3BE, GE=1/3BE, BG=2GE

GC=2/3CF, GF=1/3CF, CG=2GF

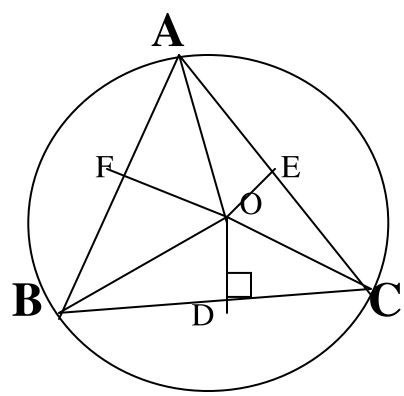


5.Mediatoarele sunt concurente, intersectia lor se numeste centrul cercului circumscris triunghiului (notatie:O) ; este un punct egal departat de virfuri.

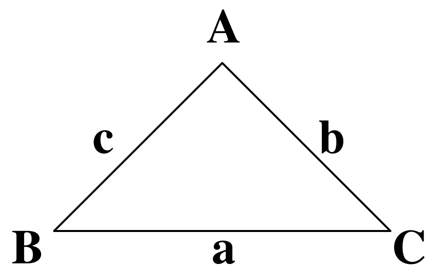
OA=OB=OC=R(raza cercului)

OD⊥BC, OF⊥AB, OE⊥AC

Triunghiuri isoscele:OAB,OBC,OAC



6.Orice latura este mai mica decit suma celorlalte doua laturi si mai mare decit diferenta lor.



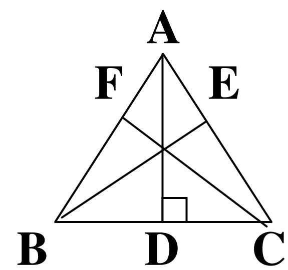
Notatii: a=BC, b=AC, c=AB

$|b-c|<a<b+c$

$|a-c|<b<a+c$

$|a-b|<c<a+b$

7.Aria este egala cu baza ori inaltimea care cade pe ea supra 2 (impartit la 2). Perimetrul este suma laturilor.



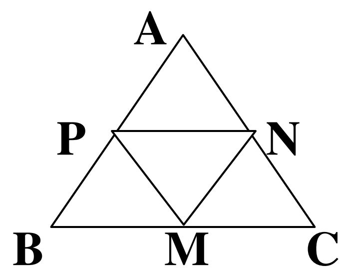
$A_{\Delta}=(b\cdot i)/2$

$A_{\Delta ABC}=(BC\cdot AD)/2$

$A_{\Delta ABC}=(AC\cdot BE)/2$

$A_{\Delta ABC}=(AB\cdot BF)/2$

8.Linia mijlocie este paralela cu baza si egala cu jumatate din ea.



M,N,P=mij.lat.

BM=MC=BC/2

CN=NC=AC/2

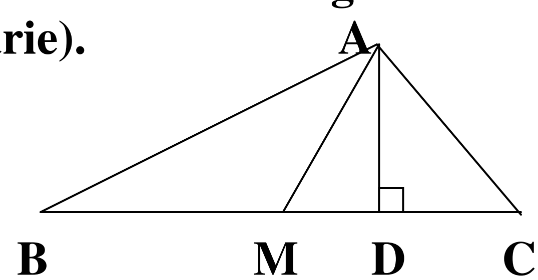
BP=AP=AB/2

$MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $PM \parallel AC$,

MN=AB/2=AP=PB, NP=BC/2=BM=MC, PM=AC/2=AN=NC

Pralelograme: BMNP, MCNP, MNAP

9.O mediana imparte triunghiul in doua triunghiuri echivalente(adica au aceeasi arie).



$A_{\Delta}=(b\cdot i)/2$

$A_{\Delta AMB}=(BM\cdot AD)/2$

$A_{\Delta AMC}=(MC\cdot AD)/2$

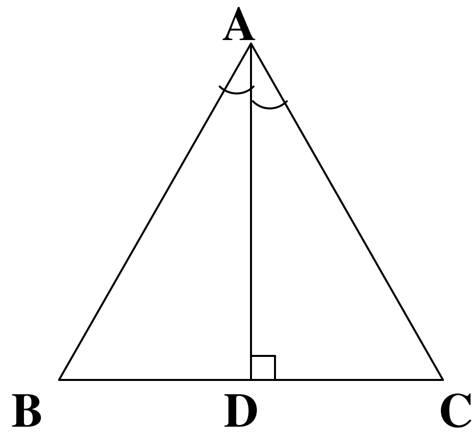
dar BM=MC(baze egale, aceeasi inaltime)

1. Triunghiul isoscel

Proprietati:

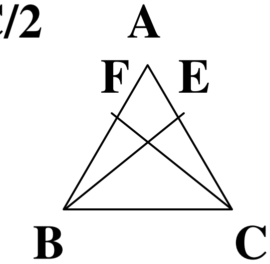
1.Are doua laturi congruente, cealalta se numeste baza. AB=AC, baza=BC

2.Unghiurile de la baza sunt congruente. <B≡<C



3.Inaltimea care cade pe baza este si bisectoare, si mediana, si inaltime si mediatoare.

AD⊥BC, <BAD≡<CAD
BD=DC=BC/2



4.Inaltimile care cad pe laturile congruente sunt congruente. Daca BE⊥AC si CF⊥AB atunci BE=CF

5.Bisectoarele care cad pe laturile congruente sunt congruente. Daca BE si CF sunt bis.,atunci BE=CF

6.Mediatoarele care cad pe laturile congruente sunt congruente. Daca BE⊥AC si CF⊥AB si E,F=mij.lat atunci BE=CF

7.Medianele care cad pe laturile congruente sunt congruente. Daca BE si CF sunt mediane(E,F=mij.lat) atunci BE=CF

8.Are o singura axa de simetrie, inaltimea care cade pe baza. Daca indoim triunghiul dupa AD(axa de simetrie) punctul B se suprapune peste C

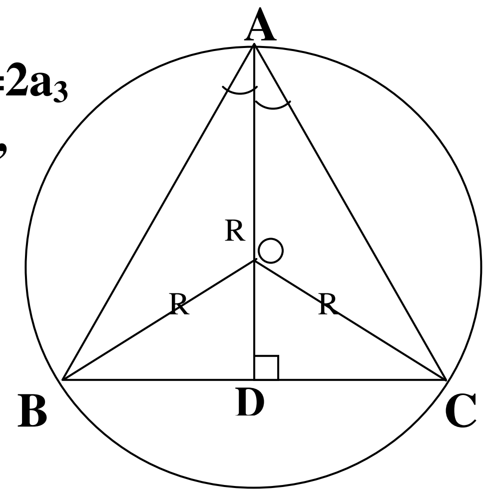
Ex.1. **Se da ΔABC, isoscel(AB=AC) si P un punct mobil pe [BC]. Demonstrati ca suma distantelor de la P la laturile congruente ale triunghiului isoscel ΔABC este constanta.**

1. Triunghiul echilateral

Proprietati:

1. Raza cercului circumscris R

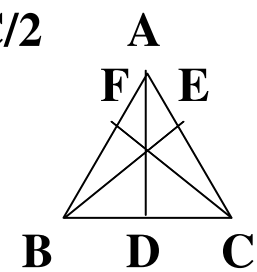
$R=OA=OB=OC=AD2/3=2OD=2a_3$



1.Are toate laturile congruente,
AB=AC=BC

2.Toate unghiurile sunt congruente. $<A \equiv <B \equiv <C(=60^0)$
Arcele BC, CA si $AB=120^0$

3.Oricare dintre cele 3 inaltimi este si bisectoare, si mediana, si inaltime si mediatoare. **$AD \perp BC$, $<BAD \equiv <CAD$** **BD=DC=BC/2**



4.Inaltimile sunt congruente.
Daca $BE \perp AC$ si $CF \perp AB$ $AD \perp BC$
atunci AD=BE=CF

5.Bisectoarele sunt congruente.
Daca AD, BE si CF sunt bis.,atunci AD=BE=CF

6.Mediatoarele sunt congruente in O centrul cercului circumscris. Apotema este perpendiculara din O pe una din laturi. De exemplu $OD \perp AB$, OD=AB/2 Daca $AD \perp BC$,$BE \perp AC$ si $CF \perp AB$ si D,E,F=mij.lat atunci AD=BE=CF

7.Medianele sunt congruente.
Daca AD, BE si CF sunt mediane(D,E,F=mij.lat) atunci AD=BE=CF

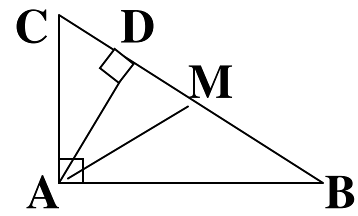
8.Are trei axe de simetrie, inaltimile.
Daca indoim triunghiul dupa AD(axa de simetrie) punctul B se suprapune peste C, etc...

6.Aria, in functie de latura este egala cu $(l^2\sqrt{3})/4$, unde l este latura triunghiului.

7.Cercul inscris si cel circumscris triunghiului sunt concentrice(au acelasi centru).

1. Triunghiul dreptunghic

Proprietati:

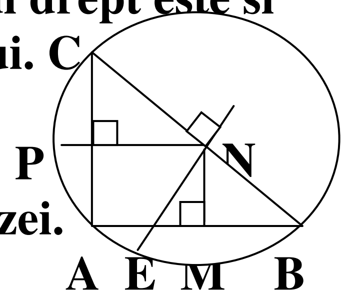


1.Are un unghi de 90^0 , 2 laturi se numesc catete, iar cealalta se numeste ipotenuza.
Catete=AB,AC   ipotenuza=BC

2.Unghiurile de la baza sunt ascutite. $m(<B)+m(<C)<=90^0$

3.Mediana care cade pe ipotenuza este egala cu jumatate din ipotenuza; mijlocul ipotenuzei este centrul cercului circumscris triunghiului, iar raza este egala cu jumatate din ipotenuza. AM=MB=MC=BC/2, raza R= AM=MB=MC=BC/2

4.Catetele sunt si inaltimi, deci virful unghiului drept este si intersectia inaltimilor(ortocentrul) triunghiului. AB,AC,AD sunt inaltimi



5.Mediatoarele se intilnesc in mijlocul ipotenuzei.
$EN \perp BC$,$NP \perp AC$ si $MN \perp AB$, iar M,N,P=mij.lat

6.Aria este egala cu ipotenuza ori inaltimea care cade pe ea, dar si produsul catetelor supra doi, deci inaltimea care cade pe ipotenuza este egala cu produsul catetelor supra ipotenuza.
$A_{\Delta ABC}$ =AB•AC/2=BC•AD/2 ,unde $AD \perp BC$, rezulta AD= AB•AC/BC

7.In orice triunghi dreptunghic, sinusul unui unghi ascutit este egal cu cateta opusa unghiului supra ipotenuza, cosinusul unui unghi ascutit este egal cu cateta alaturata unghiului supra ipotenuza, tangenta unui unghi ascutit este egala cu cateta opusa unghiului supra cateta alaturata, cotangenta unui unghi ascutit este egala cu cateta alaturata unghiului supra cateta opusa. sinB=AC/BC, cosB=AB/BC, sinC=AB/BC cosC=AC/BC, tgB=AC/AB, tgC=AB/AC, ctgB=AB/AC, ctgC=AC/AB, tgu=1/ctgu, ctgu=1/tgu, (tgu)(ctgu)=1,

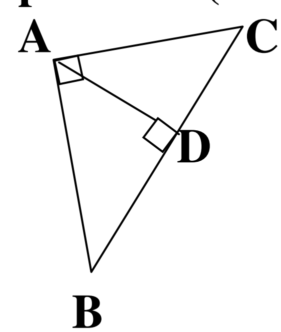
$tgu=sinu/cosu$, $ctgu=cosu/sinu$. Din teorema lui Pitagora $a^2=b^2+c^2$, rezulta $1=(b^2)/(a^2)+(c^2)/(a^2)$, adica $\sin^2u+\cos^2u=1$

$\sin30^0=\cos60^0=1/2$, $\sin60^0=\cos30^0=\sqrt{3}/2$, $\sin45^0=\cos45^0=\sqrt{2}/2$, $tgu=sinu/cosu$, $ctgu=cosu/sinu$, deci $tg45^0=1$, etc...

8. In orice triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30^0 este egala cu jumatate din ipotenuza.
Daca $m(<B)=30^0$ atunci $\sin B=AC/BC=\sin30^0=1/2$, deci $AC=BC/2$

9. In orice triunghi dreptunghic, este valabila teorema lui Pitagora : patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor. $a^2=b^2+c^2$ unde $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$

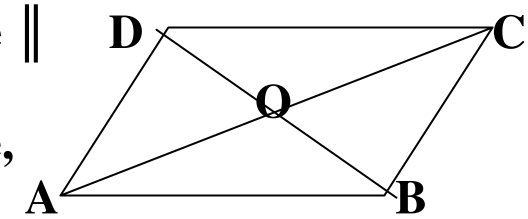
10. In orice triunghi dreptunghic, este valabila teorema inaltimii : patratul inaltimi(care cade pe ipotenuza), este egal cu produsul segmentelor determinate de ea pe ipotenuza(care sunt in fapt proiectiile catetelor pe ipotenuza).
Inaltimea este, deci, medie proportionala sau medie geometrica intre segmentele determinate de ea pe ipotenuza.
$BD/AD=AD/CD$, sau $AD^2=BD\cdot CD$



11. In orice triunghi dreptunghic, este valabila teorema catetei : patratul catetei este egal cu produsul dintre ipotenuza si proiectia catetei pe ipotenuza.
Cateta este, deci, medie proportionala sau medie geometrica intre ipotenuza si proiectia ei pe ipotenuza.
$AB/BD=BC/AB$, sau $AB^2=BD\cdot BC$
$AC/CD=BC/AC$, sau $AC^2=CD\cdot BC$

12.Triunghiul dreptunghic si isoscel are unghiurile ascutite de 45^0. $m(<A)=90^0$, $m(<B)=m(C)=45^0$

<u>1. Paralelogramul</u> **=laturile opuse $\parallel$**



Proprietati:

1.Are unghiurile opuse congruente, iar cele alaturate suplementare.

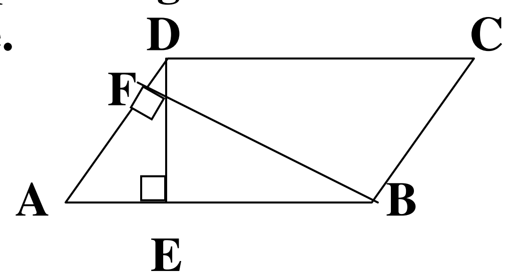
<A≡<C, <B≡<D, m(<A)+ m(<D)=180^0 , m(<A)+ m(<B)=180^0
m(<B)+ m(<C)=180^0 , m(<C)+ m(<D)=180^0

2.Are laturile opuse paralele si congruente.
AB=CD, BC=AD, AB$\parallel$CD, BC$\parallel$AD

5.Diagonalele sunt concurente intr-un punct care este mijlocul lor.
OA=OC=AC/2 , OB=OD=BD/2

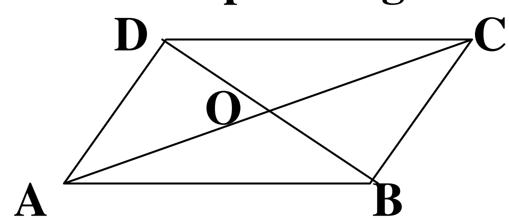
9.Aria paralelogramului este egala cu latura ori inaltimea care cade pe ea. Perimetrul paralelogramului este de 2 ori suma a doua laturi alaturate.

A = AB·DE=AD·BF
P=AB+BC+CD+DA
P= 2(AB+BC)



10.Orice diagonala formeaza cu doua laturi opuse unghiuri congruente.

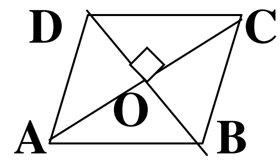
Unghiuri alterne interne ≡ :
<CAB≡<ACD; <DAC≡<BCA...
<ADB≡<CBD; <BDC≡<DBC...



10.Diagonalele formeaza doua perechi de unghiuri congruente.

Unghiuri opuse la virf congruente:
<AOD≡<BOC, <COD≡<BOA

<u>1. Rombul</u> = paralelogramul cu 2 laturi alaturate ≡



Proprietati:

1.Are unghiurile opuse congruente, iar cele alaturate suplementare.

<A≡<C, <B≡<D, m(<A)+ m(<D)=180^0 , m(<A)+ m(<B)=180^0
m(<B)+ m(<C)=180^0 , m(<C)+ m(<D)=180^0

2.Are laturile opuse paralele.
AB ∥ CD, BC ∥ AD

2.Are laturile congruente.
AB=CD= BC=AD

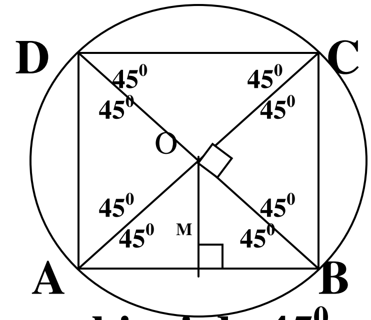
5.Diagonalele sunt concurente intr-un punct care este mijlocul lor.
OA=OC=AC/2 , OB=OD=BD/2

5.Diagonalele sunt perpendiculare.
AC ⊥ BD, deci <AOD≡<BOC≡ <COD≡<BOA(=90^0)
Diagonalele formeaza cu laturile triunghiuri dreptunghice: OAB,OBC,OCD,ODA
5.Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor rombului.
<CAB≡<CAD≡<BCA≡<DCA(=m(<A)/2=m(<C)/2)
<BDA≡<BDC≡<DBA≡<DBC(=m(<B)/2=m(<D)/2)
9.Aria rombului este egala cu produsul diagonalelor supra 2.
Perimetrul rombului este de 4 ori latura.
A=AC•BD/2 ; P=AB+BC+CA+DA=4AB

10.Orice diagonala formeaza cu doua laturi opuse unghiuri congruente.
<CAB≡<ACD; <DAC≡<BCA; <ADB≡<CBD; <BDC≡<DBC

11.Diagonalele sunt si axe de simetrie.

<u>**1. Patratul**</u> **=rombul cu un unghi de 90^0**



Proprietati:

1.Are toate unghiurile de 90^0.

2.Are toate laturile congruente.

3.Diagonalele sunt congruente. AC=BD

4.Diagonalele sunt si bisectoare; formeaza unghiuri de 45^0 cu laturile patratului.

5.Diagonalele sunt concurente intr-un punct care este mijlocul lor si centrul cercului circumscris(notatie:O).
Raza R=OA=OB=OC=OD=AB$\sqrt{2}$/2

6.Diagonalele sunt concurente intr-un punct O care este egal departat de virfurile patratului.

7.Diagonalele sunt perpendiculare. $AC \perp BD$

8.Diagonalele formeaza cu laturile triunghiuri dreptunghice si isoscele(au unghiurile ascutite de 45^0):OAB,OBC,OCD,ODA

9.Aria patratului este egala cu latura la patrat(la puterea a doua). Perimetrul patratului este de 4 ori latura. $A_{\square}=AB^2$
Perimetrul=4AB

10.Diagonalele sunt si axe de simetrie.

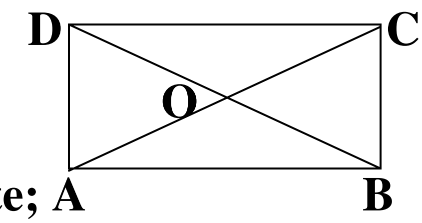
11.Are laturile opuse paralele . $AB \parallel CD$ si $BC \parallel AD$

12.Apotema este perpendiculara din centru, O pe una din laturi. De exemplu $OM \perp AB$, OM=AB/2

<u>**Ex.1**</u>**Fie ADQP si BCQP doua romburi cu latura de 10 avind unghiurile ascutite A si B de 30^0, iar E si F intersectiile lui AB cu laturile QD, QC. Aflati ariile QEF si ABCD. Aflati sin15^0.**

<u>**Ex.1**</u>**Fie ABCD un patrat si [AE bisectoarea <BAC. Aflati sin(<EAB).**

<u>1. Dreptunghiul</u> =paralelogram cu un unghi de 90^0



Proprietati:

1.Are toate unghiurile de 90^0.

2.Are laturile opuse paralele si congruente; doua se numesc lungimi(L) si celelalte doua latimi(l).

$AB=CD$, $BC=AD$, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $L=AB=CD$, $l=BC=AD$

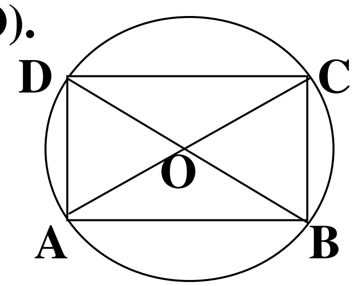
3.Diagonalele sunt congruente.

$AC=BD$

5.Diagonalele sunt concurente intr-un punct care este mijlocul lor si centrul cercului circumscris(notatie:O).

$OA=OB=OC=OD=AC/2=BD/2$

Raza $R=OA=OB=OC=OD$



6.Diagonalele sunt concurente intr-un punct O care este egal departat de virfurile dreptunghiului.

8.Diagonalele formeaza cu laturile triunghiuri isoscele.

$\Delta OAB \equiv \Delta ODC$, $\Delta OBC \equiv \Delta OAD$

9.Aria dreptunghiului este egala cu Lungimea ori latimea(Ll).

Perimetrul dreptunghiului este de 2 ori Lungimea+latimea.

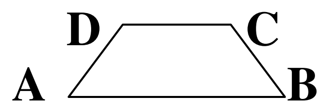
$A_{\square} = L \cdot l = AB \cdot BC$, perimetrul, $P=2(L+l)=AB+BC+CD+AD$

10.Orice diagonala formeaza cu doua laturi opuse unghiuri congruente.

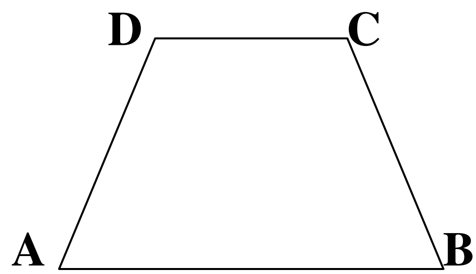
Unghiuri alterne interne $\equiv$: $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ACD$; $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$...

Ex.Fie ABCD dreptunghi cu $AD=12$ si $m(\sphericalangle BAC)=30^0$, iar $AE \perp BD$, $BF \perp AC$ si P intersectia dintre AE si BF. Fie $MN \parallel CD$ si $O=AC \cap BD$. Calculati OM/EF.

<u>1. Trapezul</u> =patrulater cu 2 laturi ∥
Proprietati:

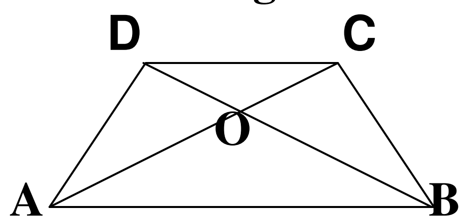


2.Are doua din laturile opuse paralele, le vom numi baze, baza mare si baza mica, celelalte doua se numesc laturi neparalele. Baza mare=AB, baza mica=CD, laturile neparalele=BC si AD



2.Trapezul isoscel are laturile neparalele congruente.
BC=AD

2.Trapezul isoscel are unghiurile de la baza congruente.
<A≡<B <C≡<D

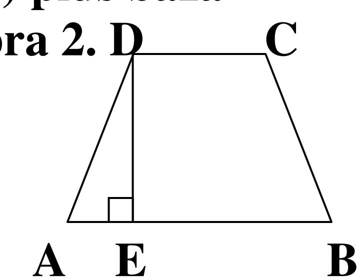


2.Trapezul isoscel are diagonalele congruente.
AC≡BD

2.Diagonalele trapezului isoscel formeaza triunghiuri isoscele cu bazele.
OA=OB si OC=OD, deci ΔOAB si ΔOCD sunt isoscele

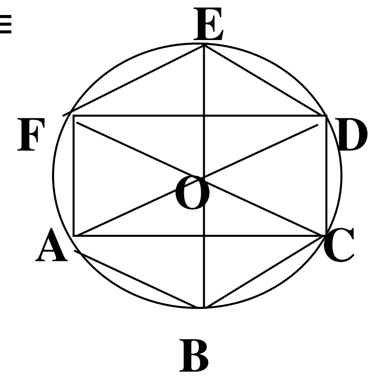
5.Daca diagonalele sunt perpendiculare, trapezul se numeste trapez ortodiagonal. AC⊥BD , ΔOAB, ΔOCD=dreptunghice

9.Aria trapezului este egala cu baza mare(B) plus baza mica(b) totul de inmultit cu inaltimea(i) supra 2.
Perimetrul trapezului este suma laturilor.
A=(B+b)i/2=(AB+CD)DE/2
P=AB+BC+CD+DA



10.Orice diagonala formeaza cu bazele unghiuri congruente.
<CAB≡<ACD; <BDC≡<DBA

<u>1. Hexagonul regulat</u>=poligon convex cu 6 laturi ≡



Proprietati:

1.Are toate unghiurile de 60^0.

2.Are toate laturile congruente

AB=BC=CD=DE=EF=FA =R

3.Laturile opuse sunt ‖

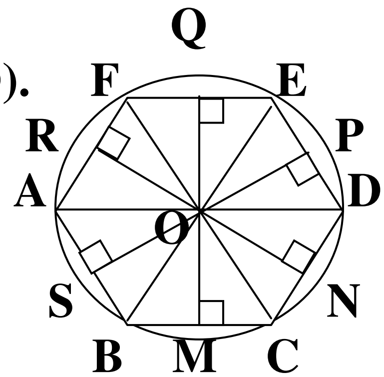
AB‖DE, BC‖EF, CD‖AF

3.Diagonalele sunt diametre in cercul circumscris.

AD=CF=BE=2R unde R=raza

R=OA=OB=OC=OD=OE=OF= AB=BC=CD=DE=EF=FA

5.Diagonalele sunt concurente in mijlocul lor - centrul cercului circumscris(notatie:O).



R=OA=OB=OC=OD=AD/2=BE/2=CF/2

Raza R=OA=OB=OC=OD

Perpendicularele din O pe laturi se numesc apoteme. OM,ON,OP,OQ,OR,OS

6.Diagonalele sunt concurente intr-un punct O care este egal departat(apotemele) de laturile hexagonului.

a_6=OM=ON=OP=OQ=OR=OS

8.Diagonalele formeaza cu laturile triunghiuri echilaterale≡.

ΔOAB≡ΔODC≡ΔOBC≡ΔODE≡ΔOEF≡ΔOFA

9.Relatii intre : arie , perimetru , latura, raza , apotema

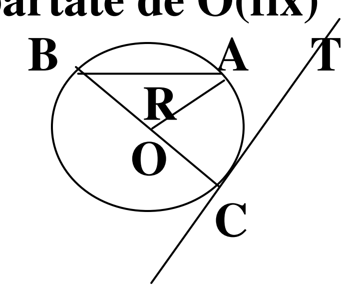
Latura $l_6=R$, $a_6=R\sqrt{3}/2$

$A= 3\cdot l_6\cdot a_6=6\cdot BC\cdot OM/2= 3\cdot R^2\sqrt{3}/2$,

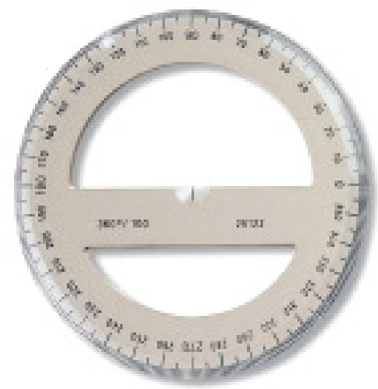
Perimetrul, $P=6\cdot l_6=6\cdot AB=6\cdot R$

10.Orice diagonala formeaza cu doua laturi opuse unghiuri congruente(=60^0). Unghiuri alterne interne ≡ : <DAB≡<ADE; <DAF≡<ADC...

<u>1. CERCUL</u>=punctele din plan egal departate de O(fix)
O=centru, raza=OA, BC=diametru
BC=2R, puncte diametral opuse=B si C
BC=2OA
Arcul mic notat $\overset{\frown}{AB}$ si arcul mare $\overset{\frown}{AB}$
pe care-l identificam prin 3 litere $\overset{\frown}{ACB}$

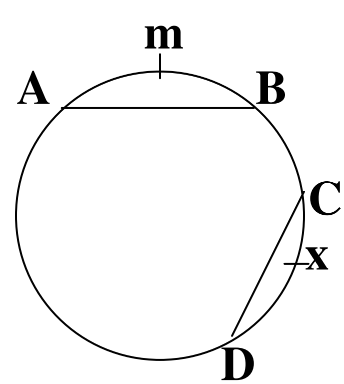


Coarda AB este coarda care subintinde arcul $\overset{\frown}{AB}$.
Diametrul este cea mai mare coarda(segmentul determinat de doua puncte de pe cerc). TC=tangenta la cerc(are un singur punct comun cu cercul si este perpendiculara pe raza OC)
Doua cercuri sunt congruente daca au razele egale.



1. Un arc de un grad(1^0) este arcul care se obtine daca impartim circumferinta unui cerc in 360 de arce congruente (egale); deci tot cercul are 360^0.
Lungimea cercului $L=2\pi R$, **aria cercului $S=\pi R^2$, unde π este un numar irational $\pi=3,14159...$ cu un numar infinit de zecimale si neperiodic, este rapotul constant dintre lungimea cercului si diametru.**
2. Doua arce sunt congruente daca prin suprapunere coincid sau daca au aceeasi masura(acelasi numar de grade) si fac parte din acelasi cerc sau cercuri egale.

3.In acelasi cerc sau in doua cercuri egale, la arce congruente corespund coarde congruente(si reciproc: la coarde congruente corespund arce congruente).

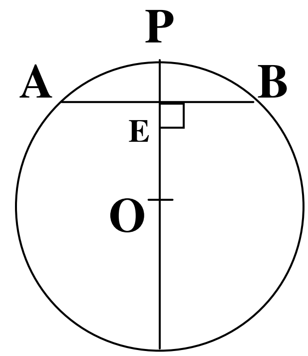


Daca arcul $\overset{\frown}{AmB} \equiv \overset{\frown}{CxD}$ atunci si coarda $[AB] \equiv [CD]$ (si reciproc)

4. **Perpendiculara din centru pe coarda, imparte coarda si arcul pe care-l subintinde in parti congruente.**

Fie OE $\perp$ AB

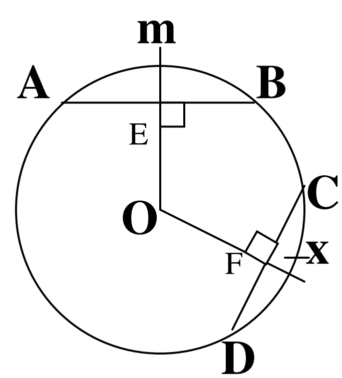
Rezulta: AE=EB, arcul $\overset{\frown}{AP} \equiv \overset{\frown}{PB}$



5.In acelasi cerc sau in doua cercuri egale, doua coarde egal departate de centru sunt congruente(si reciproc: coardele congruente sunt egal departate de centru).

Fie OE$\perp$AB si OF$\perp$CD si OE=OF

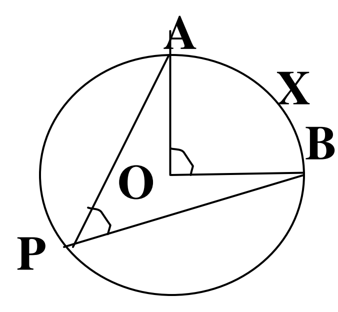
Concluzia: AB=CD



6.Unghiul cu virful in centrul cercului se numeste unghi la centru si are ca masura arcul cuprins intre laturi.

<AOB=unghi la centru

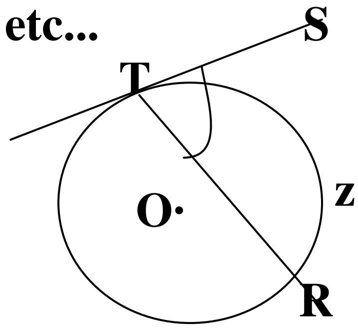
m(<AOB) =m($\overset{\frown}{AXB}$)

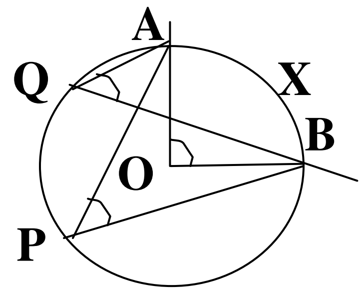


7.Unghiul cu virful pe cerc se numeste unghi inscris si are ca masura jumatate din masura arcului cuprins intre laturi.

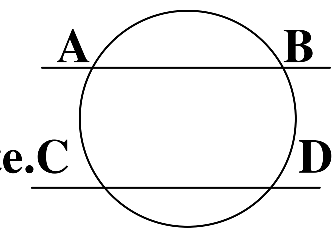
<APB=unghi inscris, m(<AOB) =m($\overset{\frown}{AXB}$) /2=m(<AOB)/2

<APB≡<AQB, etc...



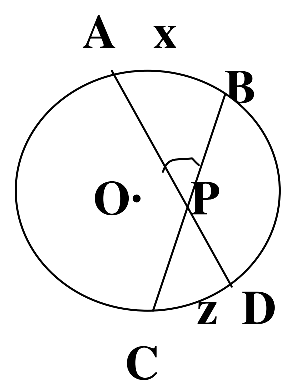


In figura de mai sus TS are un singur punct comun cu cercul, deci este o tangenta la cerc, iar TR este o coarda/secanta a cercului. Si in acest caz masura <STR este tot jumatate din masura arcului cuprins intre laturi, adica :
m(<STR)=m($\overset{\frown}{TZR}$)/2

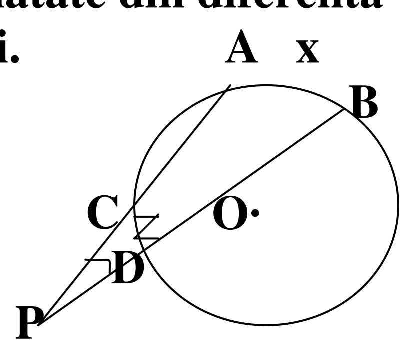


7.Doua drepte paralele determina pe un cerc pe care il intersecteaza arce congruente. Daca AB║CD atunci $\overset{\frown}{AC}\equiv\overset{\frown}{BD}$

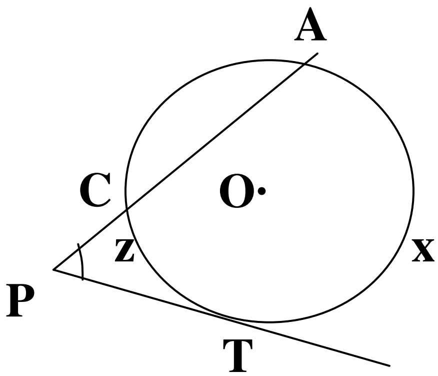
8.Unghiul cu virful in interiorul cercului se numeste unghi cu virful in interior si are ca masura jumatate din suma masurilor arcelor cuprinse intre laturi.
<APB=unghi cu virful in interior,
m(<APB) =(m($\overset{\frown}{AxB}$)+m($\overset{\frown}{CzD}$))/2



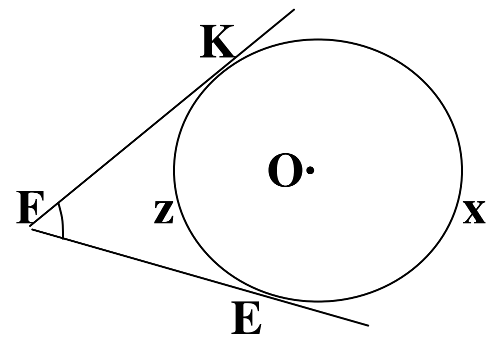
8.Unghiul cu virful in exteriorul cercului se numeste unghi cu virful in exterior si are ca masura jumatate din diferenta masurilor arcelor cuprinse intre laturi.
<APB=unghi cu virful in exterior,
m(<APB) =(m($\overset{\frown}{AxB}$)-m($\overset{\frown}{CzD}$))/2
Diferenta se ia in modul.



Ambele, sau numai una dintre laturile unghiului <APB, poate sa fie tangenta la cerc, formula ramine valabila. Daca una sau ambele laturi sunt exterioare cercului(nu au puncte comune cu cercul) ducem paralele printr-un punct al cercului.

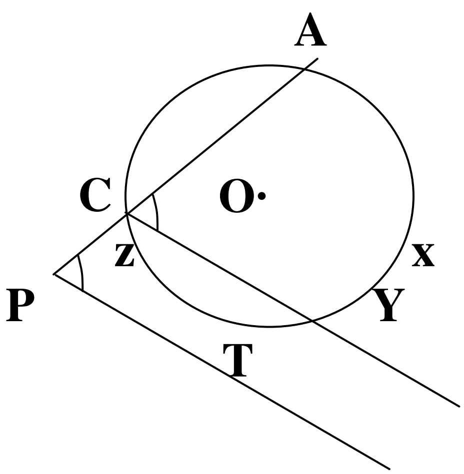


$m(<APT) =(m(\overset{\frown}{AxT})-m(\overset{\frown}{CzT}))/2$

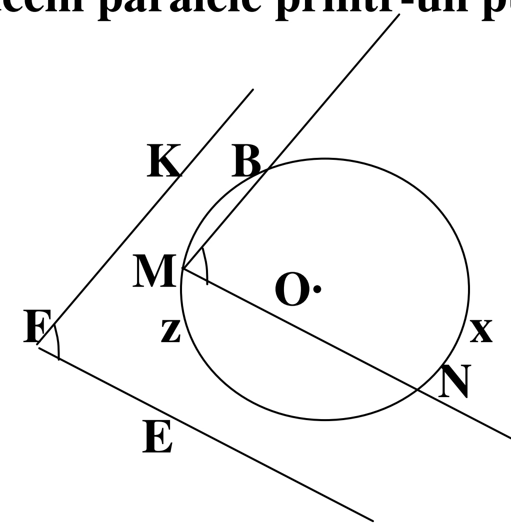


$m(<KFE) =(m(\overset{\frown}{KXE})-m(\overset{\frown}{KzT}))/2$

Daca una sau ambele laturi sunt exterioare cercului(nu au puncte comune cu cercul) ducem paralele printr-un punct al cercului.



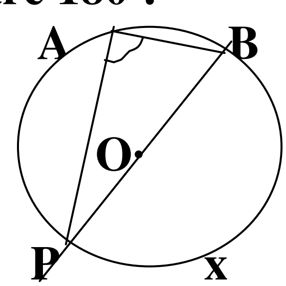
Ducem prin C paralela CY la PT
Deci <ACY≡<APT
$m(<APT) =(m(\overset{\frown}{AxY}))/2$



Ducem prin M paralela MB la KF
si MN║FE, deci <KFE≡<BMN
$m(<KFE) =(m(\overset{\frown}{BXN}))/2$

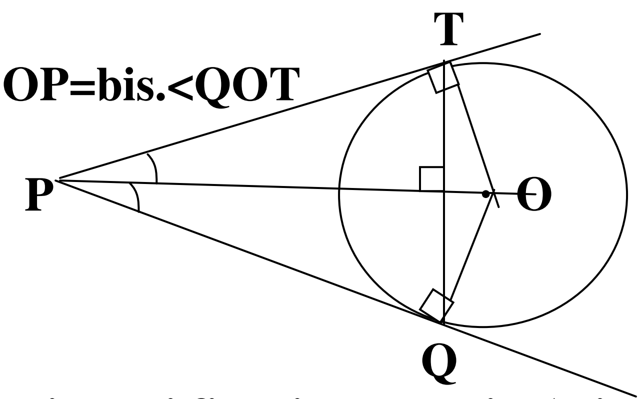
9.Unghiul cu virful pe cerc si care are intre laturi un semicerc este un unghi drept pentru ca un semicerc are 180^0.

<PAB=unghi inscris intr-un semicerc
deci este unghi inscris si
$m(<PAB) =m(\overset{\frown}{PxB})/2 =180^0/2=90^0$



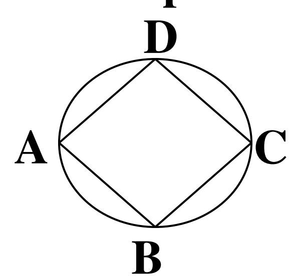
10. Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce doua tangente la acest cerc si numai doua($PT \perp OT$, $PQ \perp OT$). Ambele tangente la cerc, sunt congruente, iar semidreapta determinata de punct si centrul cercului este bisectoarea unghiului format de cele doua tangente si este perpendiculara pe dreapta determinata de punctele de tangenta.

PT=PQ, OP=bis.<QPT, OP=bis.<QOT
$OP \perp TQ$



11. Un cerc este circumscris unei figuri geometrice(triunghi, patrat, dreptunghi, pentagon, hexagon, etc...) daca virfurile acelei figuri geometrice sunt toate pe cerc.
Un patrulater care are virfurile pe un cerc se numeste patrulater inscriptibil. Patratul, dreptunghiul sunt exemple de patrulatere inscriptibile.
De exemplu un paralelogram nu poate avea virfurile pe un cerc, se spune ca nu este inscriptibil.

12.Un patrulater este inscriptibil daca unghiurile opuse sunt suplementare(au impreuna 180^0).
Reciproca : un patrulater inscriptibil are unghiurile opuse suplementare.
m(<A)+m(<C)= 180^0
m(<B)+m(<D)= 180^0



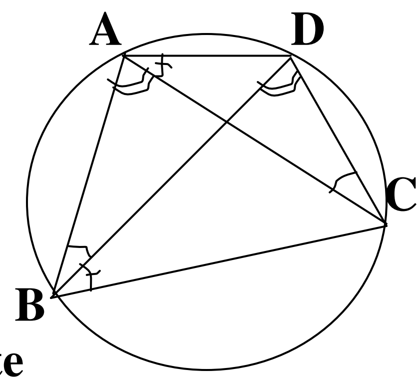
13.Intr-un patrulater inscriptibil unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente.

$m(<ABD)=m(<ACD)=m(\overset{\frown}{AD})/2$

$m(<DBC)=m(<DAC)$

$m(<BAC)=m(<BDC)$

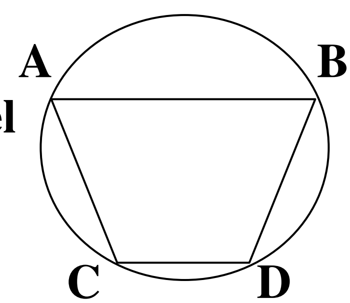
$m(<ADB)=m(<ACB)$



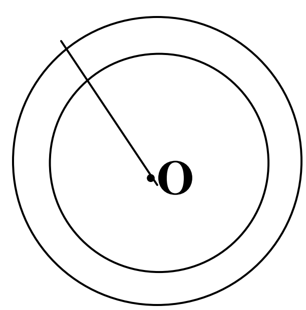
Este adevarata si reciproca si o folosim cind trebuie sa demonstram ca un patrulater este inscriptibil.

14.Prin trei puncte trece intotdeauna un cerc, cu alte cuvinte orice triunghi este inscriptibil si are centrul la intersectia mediatoarelor. Dar patru puncte, exista oare intotdeauna un cerc care sa treaca prin patru puncte date ? Dupa cum am vazut, un patrulater este inscriptibil numai daca suma unghiurilor opuse este 180^0. Spunem ca patru puncte sunt conciclice daca ele sunt pe acelasi cerc, daca exista un cerc care sa treaca prin cele patru puncte.

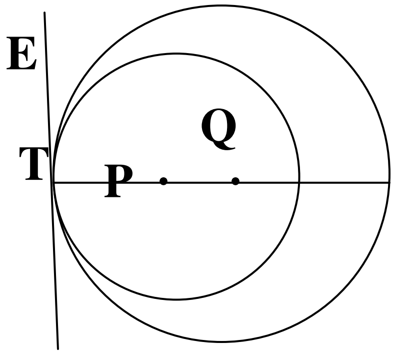
15.Un trapez inscriptibil este trapez isoscel

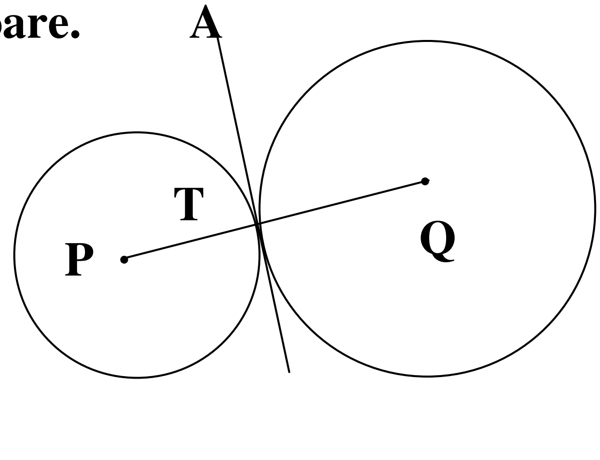


17.Doua cercuri care au acelasi centru, dar raze inegale se numesc cercuri concentrice.



16.Doua cercuri care au un singur punct comun se numesc cercuri tangente. Daca cercurile sunt exterioare unul altuia atunci ele se numesc cercuri tangente exterioare.
Daca cercurile sunt interioare unul altuia atunci ele se numesc cercuri tangente interioare.

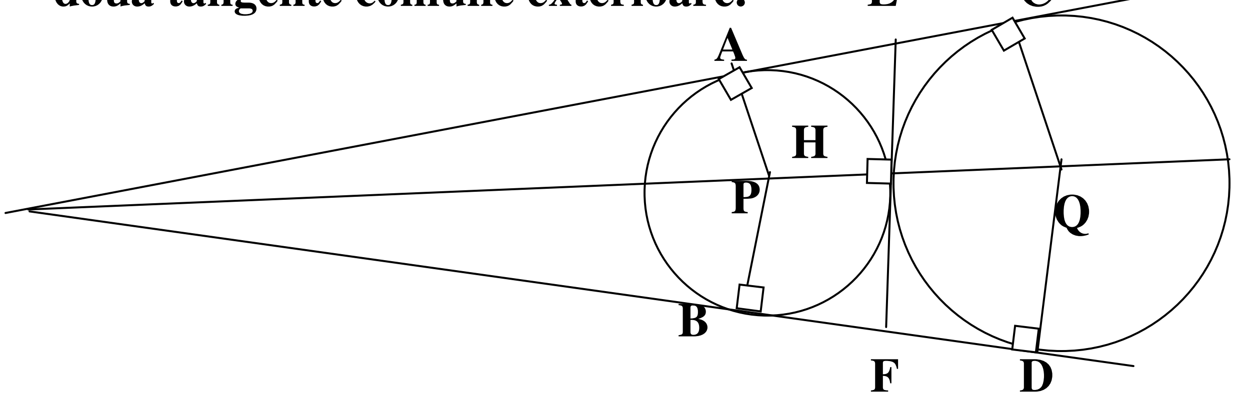




Cercuri tangente interioare
PQ este linia centrelor
T este punctul de tangenta
Tangenta TE⊥PQ
PQ=R-r=QT-PT

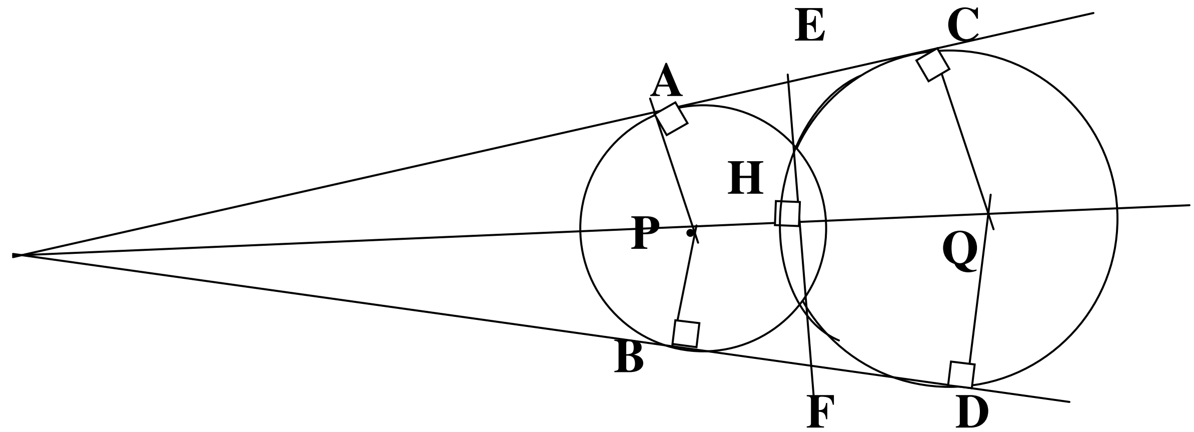
Cercuri tangente exterioare
PQ este linia centrelor
T este punctul de tangenta
Tangenta TA⊥PQ
PQ=R-r=QT+PT

Daca cercurile sunt tangente exterioare atunci ele admit si doua tangente comune exterioare.



Se observa ca sau format 4 patrulatere inscriptibile : APHE, BPHF, QDFH si QCEH. De asemenea mai multe triunghiuri isoscele : PHA, PBH, FBH, EAH, EHC,QHC, QHD

Daca cercurile sunt secante atunci ele au doua puncte comune



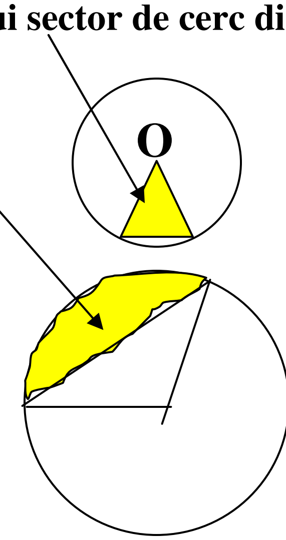
Se observa ca sau format 4 patrulatere inscriptibile : APHE, BPHF, QDFH si QCEH. De asemenea mai multe triunghiuri isoscele : PHA, PBH, FBH, EAH, EHC,QHC, QHD

<u>11.</u> Lungimea si aria cercului

Lungimea cercului $L=2\pi R$, aria cercului $S=\pi R^2$, unde π este un numar irational $\pi=3,14159...$ cu un numar infinit de zecimale si neperiodic, este rapotul constant dintre lungimea cercului si diametrul sau.

Arcul de cerc cu masura de n^0 are lungimea $l_{arc}=(2\pi R)(n/360)$, rezulta din regula de trei simpla: masura cercului=360^0 corespunde la o lungime de $2\pi R$, arcul are n^0 si lungimea l_{arc}, etc... La fel obtinem aria unui sector de cerc din aria cercului: $S_{sector}=(\pi R^2)(n/360)$

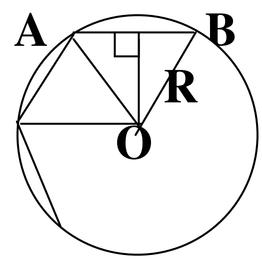
Aria unui segment de cerc(portiunea dintre o coarda si arcul pe care-l subintinde) se obtine daca scadem din aria sectorului aria triunghiului isoscel format de raze cu coarda. $S_{sector}=R^2(\pi n/360 - (\sin(n))/2)$



9.Poligoane regulate

1.Definitie: **un poligon convex cu toate laturile si toate unghiurile congruente.**

Daca impartim un cerc in n arce egale, deci fiecare arc are masura de $(360/n)^0$ si unim cele n puncte obtinem un poligon regulat pentru ca :



1.toate laturile sale sunt congruente, fiecare subintinde un arc cu aceeasi masura $(360/n)^0$

2.toate unghiurile unui astfel de poligon sunt congruente avind masura egala cu $(360(n-2))^0$ pentru ca au intre laturi exact n-2 arce egale cu $(360/n)^0$.

2.Orice poligon regulat este inscriptibil.

3.Latura, apotema si aria in functie de raza cercului(R)

latura notata l_n=AB, apotema a_n=OM(lungimea segmentului determinat de O si piciorul perpendicularei din O pe latura)

$l_n=2R\sin(180^0/n)$, $a_n=R\cos(180^0/n)$, $S_n=p\cdot a_n$, unde

p=semiperimetrul=$(n\cdot l_n)/2$, $S_n=nR^2\sin(180^0/n)\cos(180^0/n)$

4.Poligoane regulate studiate: triunghi echilateral, patrat, hexagon regulat

<u>Ex.1</u> Aflati unghiul unui pentagon(5 lat)/ octogon(8 lat) regulat .

<u>Ex.2</u> Exista un poligon regulat care are un unghi de 172^0 sau de 165^0 ?

<u>Ex.3</u> Aflati latura unui poligon regulat cu 15 laturi inscris in cercul cu R=125.

<u>Ex.4</u> Calculati apotema unui poligon regulat cu 12 laturi inscris in cercul cu raza R=300.

<u>Ex.5</u> Pe laturile unui hexagon regulat construim spre exteriorul sau patrate. Ce fel de poligon obtinem unind virfurile acestor patrate ? Aflati aria poligonului.

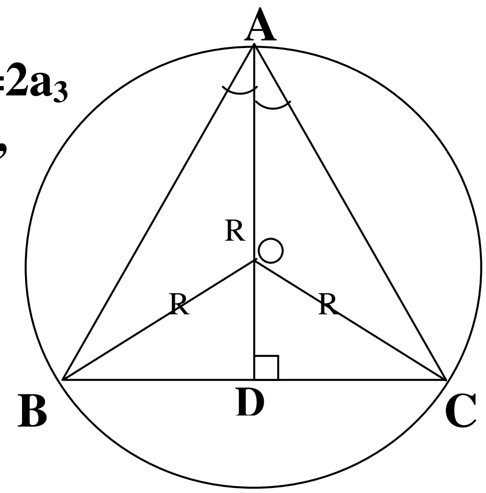
<u>Ex.6</u> Aflati raportul ariilor cercurilor circumscris respectiv inscris unui poligon regulat cu opt laturi(octogon).

1. Triunghiul echilateral

Proprietati:

1. Raza cercului circumscris R

R=OA=OB=OC=AD2/3=2OD=2a_3

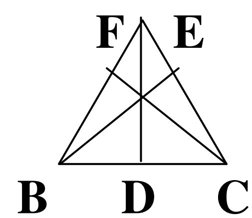


1.Are toate laturile congruente,
AB=AC=BC

2.Toate unghiurile sunt congruente. <A≡<B≡<C(=60^0)
Arcele BC, CA si AB=120^0

3.Oricare dintre cele 3 inaltimi este si bisectoare, si mediana, si inaltime si mediatoare.

AD$\perp$BC, <BAD≡<CAD
BD=DC=BC/2



4.Inaltimile sunt congruente.
Daca BE$\perp$AC si CF$\perp$AB AD$\perp$BC atunci AD=BE=CF

5.Bisectoarele sunt congruente.
Daca AD, BE si CF sunt bis.,atunci AD=BE=CF

6.Mediatoarele sunt congruente in O centrul cercului circumscris. Apotema este perpendiculara din O pe una din laturi. De exemplu OD$\perp$AB, OD=AB/2 Daca AD$\perp$BC ,BE$\perp$AC si CF$\perp$AB si D,E,F=mij.lat atunci AD=BE=CF

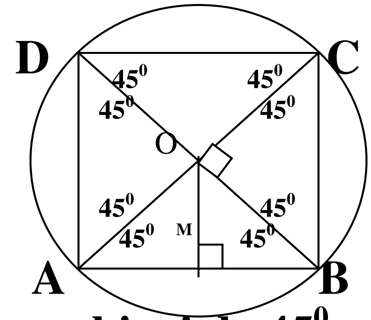
7.Medianele sunt congruente.
Daca AD, BE si CF sunt mediane(D,E,F=mij.lat) atunci AD=BE=CF

8.Are trei axe de simetrie, inaltimile.
Daca indoim triunghiul dupa AD(axa de simetrie) punctul B se suprapune peste C, etc...

6.Aria, in functie de latura este egala cu ($l^2\sqrt{3}$)/4, unde l este latura triunghiului.

7.Cercul inscris si cel circumscris triunghiului sunt concentrice(au acelasi centru).

<u>**1. Patratul**</u> **=rombul cu un unghi de 90^0**



Proprietati:

1.Are toate unghiurile de 90^0.

2.Are toate laturile congruente.

3.Diagonalele sunt congruente. AC=BD

4.Diagonalele sunt si bisectoare; formeaza unghiuri de 45^0 cu laturile patratului.

5.Diagonalele sunt concurente intr-un punct care este mijlocul lor si centrul cercului circumscris(notatie:O).
Raza $R=OA=OB=OC=OD=AB\sqrt{2}/2$

6.Diagonalele sunt concurente intr-un punct O care este egal departat de virfurile patratului.

7.Diagonalele sunt perpendiculare. $AC \perp BD$

8.Diagonalele formeaza cu laturile triunghiuri dreptunghice si isoscele(au unghiurile ascutite de 45^0):OAB,OBC,OCD,ODA

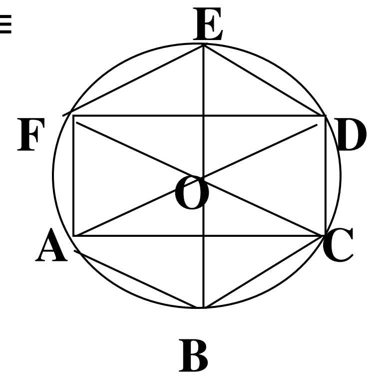
9.Aria patratului este egala cu latura la patrat(la puterea a doua). Perimetrul patratului este de 4 ori latura. $A_{\square}=AB^2$
Perimetrul=4AB

10.Diagonalele sunt si axe de simetrie.

11.Are laturile opuse paralele . $AB \parallel CD$ si $BC \parallel AD$

12.Apotema este perpendiculara din centru, O pe una din laturi. De exemplu $OM \perp AB$, $OM=AB/2$

<u>1. Hexagonul regulat</u>=poligon convex cu 6 laturi ≡



Proprietati:

1.Are toate unghiurile de 60^0.

2.Are toate laturile congruente

$AB=BC=CD=DE=EF=FA=R$

3.Laturile opuse sunt ‖

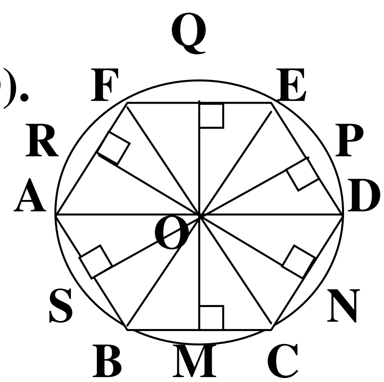
$AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$

3.Diagonalele sunt diametre in cercul circumscris.

$AD=CF=BE=2R$ unde R=raza

$R=OA=OB=OC=OD=OE=OF= AB=BC=CD=DE=EF=FA$

5.Diagonalele sunt concurente in mijlocul lor - centrul cercului circumscris(notatie:O).



$R=OA=OB=OC=OD=AD/2=BE/2=CF/2$

Raza $R=OA=OB=OC=OD$

Perpendicularele din O pe laturi se numesc apoteme. OM,ON,OP,OQ,OR,OS

6.Diagonalele sunt concurente intr-un punct O care este egal departat(apotemele) de laturile hexagonului.

$a_6=OM=ON=OP=OQ=OR=OS$

8.Diagonalele formeaza cu laturile triunghiuri echilaterale≡.

$\Delta OAB \equiv \Delta ODC \equiv \Delta OBC \equiv \Delta ODE \equiv \Delta OEF \equiv \Delta OFA$

9.Relatii intre : arie , perimetru , latura, raza , apotema

Latura $l_6=R$, $a_6=R\sqrt{3}/2$

$A= 3\cdot l_6\cdot a_6=6\cdot BC\cdot OM/2= 3\cdot R^2\sqrt{3}/2$,

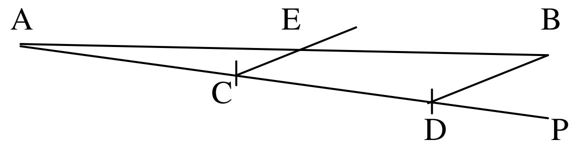
Perimetrul, $P=6\cdot l_6=6\cdot AB=6\cdot R$

10.Orice diagonala formeaza cu doua laturi opuse unghiuri congruente($=60^0$). Unghiuri alterne interne ≡ : $\angle DAB \equiv \angle ADE$; $\angle DAF \equiv \angle ADC$...

RELATII METRICE

Tr.Cum impartim un segment in doua parti congruente.

-luam in compas o lungime oarecare
-construim dreapta oarecare AP
-cu compasul luam [AC] ≡ [CD] pe dr. AP
-unim D cu B
-ducem CE║DB
-conform tr.Thales 1=AC/CD=AE/EB, deci si AE=EB



Tr.Cum impartim un segment dat in n parti congruente :

-ca mai sus, dar in loc sa luam pe AP, 2 segmente ≡ , luam n segmente ≡

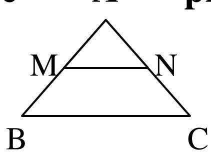
Tr.Linia mijlocie a triunghiului este paralela cu latura a treia si egala cu jumatate din ea.

-daca MN este linie mijlocie in **Δ**ABC(M si N sunt mijloacele laturilor **ΔABC**) atunci MN║BC si MN=BC/2(vezi desenul de la tr.Thales).

Tr.Daca M este mijlocul laturii [AB], iar MN║BC, atunci si N este mijlocul lui [AC].

Tr.Thales O paralela la una din laturile unui triunghi formeaza pe celelalte doua segmente A proportionale.

MN║BC rezulta AM/MB=AN/NC
Proportii derivate: AM/AB=AN/AC, MB/AB=NC/AC, ...

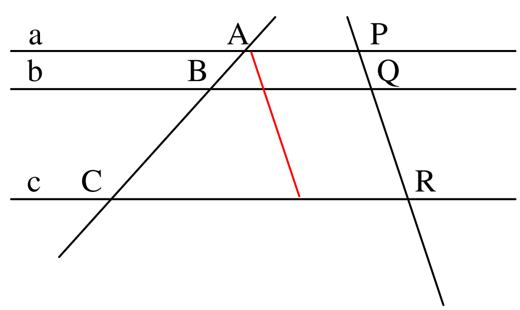


Tr.Mai multe drepte paralele echidistante determina pe orice secanta segmente congruente.

a║b║c si d(a;b)=d(b;c) rezulta AB=BC si PQ=QR

Tr.Mai multe drepte paralele neechidistante determina pe doua secante segmente proportionale.

a║b║c rezulta AB/BC≡PQ/QR



Ex.1. Fie AB=20 si AC=12, iar MN║BC si AM=5. Calculati AN si NC.

Ex.2 Demonstrati ca o bisectoare determina pe latura opusa unghiului segmente proportionale cu laturile unghiului.(Tr.bisectoarei)

Ex.3. Fie [OC bisectoarea <AOB si AQ⊥OC, iar P=AQ∩OB si B simetricul lui O fata de P. Fie BR⊥OC . Aflati valoarea raportului BQ/BR.

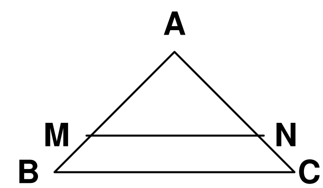
Asemanarea triunghiurilor

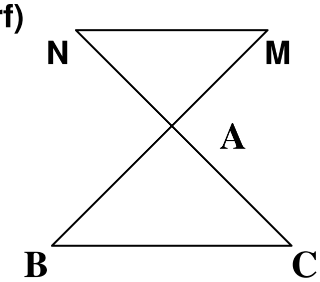
<u>Def.</u> Spunem ca doua triunghiuri sunt asemenea daca au unghiurile congruente si laturile omoloage(laturi care se opun la unghiuri≡) proportionale.

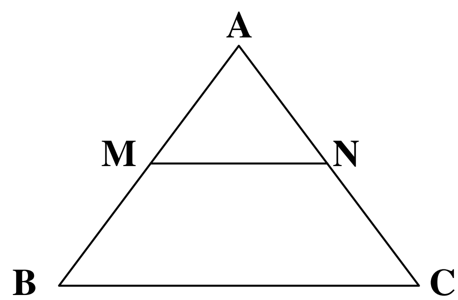
Spunem ca ∆ABC este asemenea cu ∆MNP si scriem ∆ABC~ ∆MNP, daca sunt adevarate 3 congruente si un sir de 3 rapoarte egale: <A≡<M, <B≡<N, <C≡<P (in aceasta ordine le-am scris ∆ABC~ ∆MNP, ca elemente omoloage) si AB/MN=BC/NP=AC/MP.

Obs. O proprietate a sirului de rapoarte este des folosita si anume, oricare raport din sir este egal si cu suma numaratorilor pe suma numitorilor, adica a/x=b/y=c/z=(a+b+c)/(x+y+z).
In cazul nostru AB/MN=BC/NP=AC/MP=(AB+BC+AC)/(MN+NP+MP)=(perimetrul ∆ABC)/(perimetrul ∆MNP)

<u>Tr.</u>(Teorema Fundamentala a Asemanarii=TFA)
O paralela la una din laturile unui triunghi formeaza cu celelalte doua un triunghi asemenea cu cel dat.
Ipoteza: MN ∥ BC Concluzia: ∆ABC~ ∆AMN
(Concluzia: AM/AB=AN/AC=MN/BC si <B≡<M, <C≡<N)
<BAC≡<MAN (<com/<op.virf)







<u>Ex.1</u> Fie ABCD un trapez oarecare si O intersectia diagonalelor sale. Prin O ducem MN paralela la bazele trapezului. Demonstrati ca O este mijlocul segmentului determinat de MN si laturile neparalele ale trapezului.

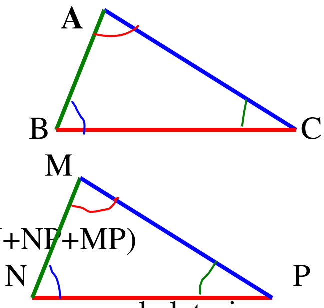
Ex.3. Fie [OC bisectoarea <AOB si AQ ⊥ OC, iar P=AQ∩OB si B simetricul lui O fata de P. Fie BR ⊥ OC . Aflati valoarea raportului AQ/BR.

<u>Ex.2</u> Fie ABCD un trapez oarecare cu bazele B si b, iar O intersectia diagonalelor sale. Prin O ducem OP paralela la bazele trapezului. Demonstrati ca 2OP este media armonica a si b.

<u>Ex.3</u> Fie O si O' centrele a doua cercuri tangente exterioare cu razele R si r, iar TT' tangenta comuna exterioara si S intersectia dintre linaia centrelor OO' si TT'. Calculati SO in functie de R si r.

Asemanarea triunghiurilor

ΔABC este asemenea cu **ΔMNP, notat ΔABC~ΔMNP,** inseamna
3 congruente si 3 egalitati(rapoartele laturilor omoloage):
<A≡<M sau m(<A)≡m(<M)
<B ≡<N sau m(<B)≡m(<N)
<C ≡<P sau m(<C)≡m(<P)
Proportionalitatea lat.: AB/MN=BC/NP=AC/MP
Sa nu uitati relatia: AB/MN=BC/NP=AC/MP=(AB+BC+AC)/(MN+NP+MP)
Si nici proportiile derivate invatate in clasa 6.
Elemente omoloage : 2 laturi care se opun la unghiuri ≡, sau 2 < care se opun la laturi proportionale .
Atentie la ordinea in care scriem literele cf. el.omoloage, **ΔABC~ΔMNP si nu altfel**



Cazurile de asemanare a triunghiurilor

1) **L.UL.**	Latura-unghi-latura
2) **U.U.**	Unghi-unghi
3) **L.L.L.**	Latura-latura-latura
Laturi proportionale	**Unghiuri ≡**

Cazul 1. (L.U.L)

Doua triunghiuri sunt asemenea daca au doua laturi proportionale si unghiurile dintre ele congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, AB/MN=BC/NP si <ABC ≡ <MNP, rezulta conform cazului LUL ca ΔABC ~ ΔMNP, deci AB/MN=BC/NP =AC/MP, <BAC ≡ <NMP, <ACB ≡ <MPN

Cazul 2. (U.U)

Doua triunghiuri sunt asemenea daca au cite doua unghiuri congruente.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, <BAC ≡ <NMP si <ABC ≡ <MNP, rezulta conform cazului UU ca ΔABC ~ ΔMNP, deci AB/MN=BC/NP =AC/MP, , <ACB ≡ <MPN

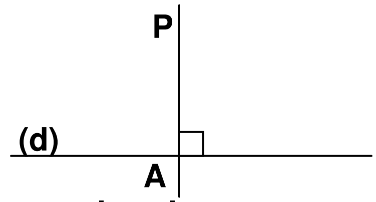
Cazul 3. (L.L.L)

Doua triunghiuri sunt asemenea daca au laturile respectiv proportionale.
Fie ΔABC si ΔMNP astfel incit, AB/MN=BC/NP =AC/MP,
rezulta conform cazului LLL ca ΔABC ~ ΔMNP, deci <ABC ≡<MNP, <BAC ≡ <NMP, <ACB ≡ <MPN
Ex. Aratati ca raportul ariilor a doua triunghiuri asemenea este egal cu patratul raportului de asemanare.

Ex.3. Fie [OC bisectoarea <AOB si AQ⊥OC, iar P=AQ∩OB si B simetricul lui O fata de P si C∈AB. Fie OM mediana ΔOBC si AE⊥OM si BF⊥OM . Aflati valoarea raportului AE/BF.

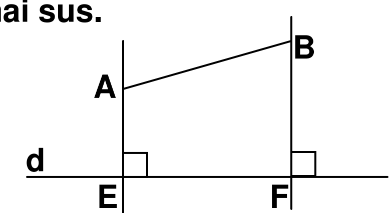
Proiectii. Simetrie.

Definitie: Spunem ca punctul A este proiectia punctului P pe dreapta (d) daca A este piciorul perpendicularei din P pe dreapta d.



$PA \perp d$ si $A \in d$
Notam A=pr(P,d)

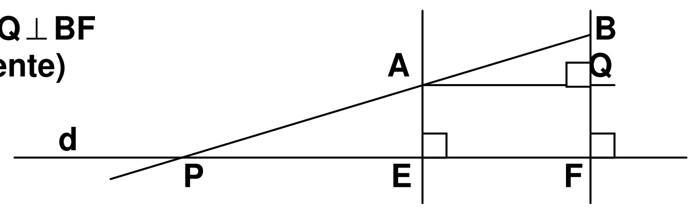
Segmentul [AB] se proiecteaza pe dreapta d ducind din capetele sale perpendicularele pe dreapta d si folosind definitia de mai sus.



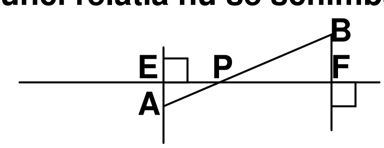
$AE \perp d$ si $BF \perp d$, $E \in d$, $F \in d$
EF este proiectia lui AB pe d si notam EF=pr(AB,d)

Sa gasim acum o relatie intre segmentul dat si proiectia sa pe o dreapta :

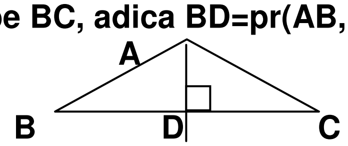
Fie EF=pr(AB,d) si $P \in AB \cap d$ si $AQ \perp BF$
<(AB,d)=<APE=<BAQ(corespondente)
EF=AQ=ABcos(<BAQ)



Rezulta : pr(AB,d)=ABcos(<(AB,d))
Cazuri particulare:
1.Daca AB este paralel cu d atunci <(AB,d)=0 si deci pr(AB,d)=AB, iar segmentul EF are exact lungimea lui AB.
2.Daca AB este perpendicular pe d atunci <(AB,d)=90^0 si deci pr(AB,d)=0 , iar segmentul EF se reduce la un punct, deci E=F.
3.Evident daca $A,B \in d$ atunci proiectia este chiar AB, adica E=A si F=B
4.Daca unul dincapetele segmentului AB este pe dreapta d, de exemplu A, atunci proiectia lui A este chiar A, deci E=A.
5.Daca AB intersecteaza dreapta d intr-un punct P atunci relatia nu se schimba doar trebuie putina atentie la desen.



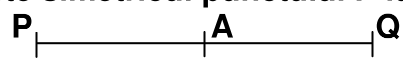
De exemplu, intr-un triunghi ABC, inaltimea AD, determina pe BC segmentele BD si CD care sunt proiectiile lui AB respectiv AC pe BC, adica BD=pr(AB,BC), iar CD=pr(AC,BC).



Ex.23 Se da segmentul AB=20 si dreapta d si unghiul dintre d si dreapta AB de 45^0. Se cere lungimea proiectiei lui AB pe dreapta d.

Ex.24 Se da segmentul EF=12, proiectia lui [AB] pe dreapta d si unghiul dintre d si dreapta AB de 60^0. Se cere lungimea lui [AB] .

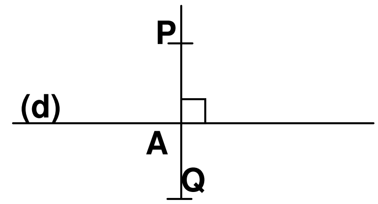
Definitie: Spunem ca punctul Q este simetricul punctului P fata de punctul A daca A este mijlocul lui [PQ].



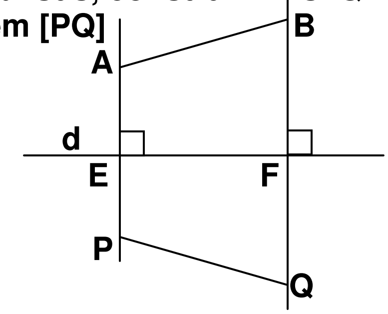
PA=AQ

Definitie: Spunem ca punctul Q este simetricul punctului P fata de dreapta (d) daca A este piciorul perpendicularei din P pe dreapta d, dar si mijlocul lui [PQ], deci d este mediatoarea segmentului [PQ].

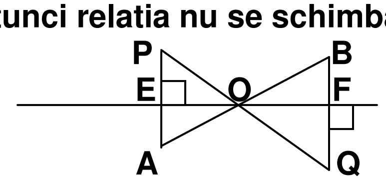
$PA \perp d$ si $A \in d$
AP=AQ=PQ/2



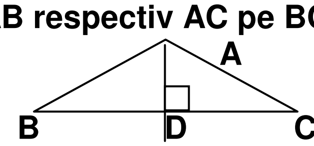
Segmentul [AB] se proiecteaza pe dreapta d ducind din capetele sale perpendicularele pe dreapta d si folosind definitia de mai sus, construim P si Q simetricele lui A, respectiv B fata de dreapta d si obtinem [PQ] simetricul lui [AB] fata de dreapta d.
Fie $AE \perp d$ si $BF \perp d$, $E \in d$, $F \in d$
E=mij.[AP], F=mij.[BQ]
[PQ]=simetricul lui [AB] fata de dreapta d
PQ=AB
In general ABQP este un trapez isoscel



Cazuri particulare:
1.Daca AB este paralel cu d atunci ABQP este dreptunghi sau patrat, iar segmentul AB este paralel cu PQ.
2.Daca AB este perpendicular pe d atunci AB si PQ sunt pe aceeasi dreapta AB perpendiculara pe dreapta d.
3.Evident daca $A,B \in d$ atunci simetricul este chiar AB
4.Daca unul din capetele segmentului AB este pe dreapta d, de exemplu A, atunci P=A, adica P este chiar A.
5.Daca AB intersecteaza dreapta d intr-un punct O atunci relatia nu se schimba doar trebuie putina atentie la desen.



De exemplu, intr-un triunghi isoscel ABC, inaltimea AD, determina pe BC segmentele BD si CD care sunt proiectiile lui AB respectiv AC pe BC, adica AB=simetricul lui AC fata de AD
AD este axa de simetrie, daca indoim desenul dupa AD, ΔABD se suprapune peste ΔACD
ΔABD se vede ca in oglinda/se oglindeste peste ΔACD.

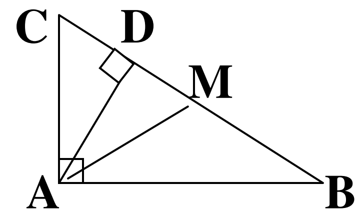


Ex.25 Punctul O imparte seg.[AB] in raportul OA/OB=2/3. Prin O ducem dreapta d si $AE \perp d$ si $BF \perp d$. Aflati valoarea raportului AE/BF .

Ex.26 Fie ABCD patrat si $P \in BC$, $m(\angle PAC)=15^0$ si M simetricul lui P fata de AC si $Q \in DC \cap AP$, $N \in AC \cap PM$, iar $QR \perp AC$. Aflati valoarea raportului MN/QR .

<u>**1. Triunghiul dreptunghic**</u>

Proprietati:

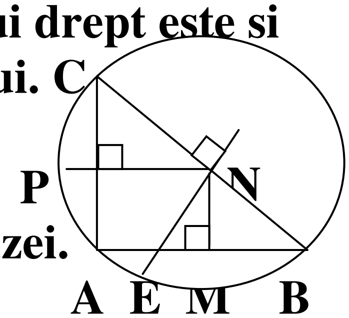


1.Are un unghi de 90^0 , 2 laturi se numesc catete, iar cealalta se numeste ipotenuza.
Catete=AB,AC ipotenuza=BC

2.Unghiurile de la baza sunt ascutite. m(<B)+m(<C)<=90^0

3.Mediana care cade pe ipotenuza este egala cu jumatate din ipotenuza; mijlocul ipotenuzei este centrul cercului circumscris triunghiului, iar raza este egala cu jumatate din ipotenuza. AM=MB=MC=BC/2, raza R= AM=MB=MC=BC/2

4.Catetele sunt si inaltimi, deci virful unghiului drept este si intersectia inaltimilor(ortocentrul) triunghiului.
AB,AC,AD sunt inaltimi



5.Mediatoarele se intilnesc in mijlocul ipotenuzei.
EN$\perp$BC ,NP$\perp$AC si MN$\perp$AB, iar M,N,P=mij.lat

6.Aria este egala cu ipotenuza ori inaltimea care cade pe ea, dar si produsul catetelor supra doi, deci inaltimea care cade pe ipotenuza este egala cu produsul catetelor supra ipotenuza.
$A_{\Delta ABC}$ =AB•AC/2=BC•AD/2 ,unde AD$\perp$BC, rezulta AD= AB•AC/BC

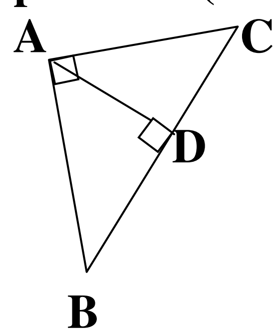
7.In orice triunghi dreptunghic, sinusul unui unghi ascutit este egal cu cateta opusa unghiului supra ipotenuza, cosinusul unui unghi ascutit este egal cu cateta alaturata unghiului supra ipotenuza, tangenta unui unghi ascutit este egala cu cateta opusa unghiului supra cateta alaturata, cotangenta unui unghi ascutit este egala cu cateta alaturata unghiului supra cateta opusa. sinB=AC/BC, cosB=AB/BC, sinC=AB/BC cosC=AC/BC, tgB=AC/AB, tgC=AB/AC, ctgB=AB/AC, ctgC=AC/AB, tgu=1/ctgu, ctgu=1/tgu, (tgu)(ctgu)=1,

tgu=sinu/cosu, ctgu=cosu/sinu. Din teorema lui Pitagora $a^2=b^2+c^2$, rezulta $1=(b^2)/(a^2)+(c^2)/(a^2)$, adica $\sin^2u+\cos^2u=1$

$\sin30^0=\cos60^0=1/2$, $\sin60^0=\cos30^0=\sqrt{3}/2$, $\sin45^0=\cos45^0=\sqrt{2}/2$, tgu=sinu/cosu, ctgu=cosu/sinu, deci $tg45^0=1$, etc...

8. In orice triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30^0 este egala cu jumatate din ipotenuza.
Daca $m(<B)=30^0$ atunci $\sin B=AC/BC=\sin30^0=1/2$, deci $AC=BC/2$
9. In orice triunghi dreptunghic, este valabila teorema lui Pitagora : patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor. $a^2=b^2+c^2$ unde a=BC, b=AC, c=AB

10. In orice triunghi dreptunghic, este valabila teorema inaltimii : patratul inaltimi(care cade pe ipotenuza), este egal cu produsul segmentelor determinate de ea pe ipotenuza(care sunt in fapt proiectiile catetelor pe ipotenuza).



Inaltimea este, deci, medie proportionala sau medie geometrica intre segmentele determinate de ea pe ipotenuza.
$BD/AD=AD/CD$, sau $AD^2=BD\cdot CD$

11. In orice triunghi dreptunghic, este valabila teorema catetei : patratul catetei este egal cu produsul dintre ipotenuza si proiectia catetei pe ipotenuza.
Cateta este, deci, medie proportionala sau medie geometrica intre ipotenuza si proiectia ei pe ipotenuza.
$AB/BD=BC/AB$, sau $AB^2=BD\cdot BC$
$AC/CD=BC/AC$, sau $AC^2=CD\cdot BC$

12.Triunghiul dreptunghic si isoscel are unghiurile ascutite de 45^0. $m(<A)=90^0$, $m(<B)=m(C)=45^0$

Arii

1.Aria triunghiului : $A_{\Delta}=(bi)/2$, unde b=baza, una din laturi si i =inaltimea care cade pe latura aleasa ca baza.
Putem scrie aria in trei feluri diferite, pentru ca putem alege ca baza oricare dintre cele 3 laturi ale triunghiului.
$A_{\Delta}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetru triunghiului, adica $p=(a+b+c)/2$
$A_{\Delta}=(bc\sin A)/2=(ca\sin B)/2=(ab\sin C)/2$

2.Aria unui patrulater oarecare: $A_{▱}= bi$, unde b=baza(una din laturi) si i =inaltimea care cade pe latura aleasa ca baza.
Aria unui paralelogram se calculeaza la fel ca aria unui patrulater oarecare.

3.Aria dreptunghiului: $A_{▭}=Ll$, unde L=lungimea, l=latimea

4.Aria patratului: $A_{\square}=l^2$, unde l=latura

5.Aria rombului: $A_{\diamond}=(d_1 \cdot d_2)/2$, unde d_1 si d_2 sunt diagonalele rombului.

5.Aria trapezului: $A_{⏢}= \dfrac{(B+b)i}{2}$, unde B=baza mare, b=baza mica, iar i=inaltimea, adica perpendiculara pe baze

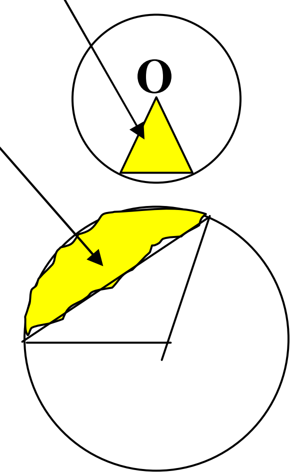
6.Poligoane regulate=virfurile sunt pe cerc, laturile sunt≡
Latura, apotema si aria in functie de raza cercului(R)
latura notata l_n=AB, apotema a_n=OM(lungimea segmentului determinat de O si piciorul perpendicularei din O pe latura)
$l_n=2R\sin(180^0/n)$, $a_n=R\cos(180^0/n)$, $S_n=p\cdot a_n$, unde p=semiperimetrul$=(n\cdot l_n)/2$, $S_n=nR^2\sin(180^0/n)\cos(180^0/n)$

11. Lungimea si aria cercului

Lungimea cercului $L=2\pi R$, aria cercului $S=\pi R^2$, unde π este un numar irational $\pi=3,14159...$ cu un numar infinit de zecimale si neperiodic, este rapotul constant dintre lungimea cercului si diametrul sau.

Arcul de cerc cu masura de n^0 are lungimea $l_{arc}=(2\pi R)(n/360)$, rezulta din regula de trei simpla: masura cercului=360^0 corespunde la o lungime de $2\pi R$, arcul are n^0 si lungimea l_{arc}, etc... La fel obtinem aria unui sector de cerc din aria cercului: $S_{sector}=(\pi R^2)(n/360)$

Aria unui segment de cerc(portiunea dintre o coarda si arcul pe care-l subintinde) se obtine daca scadem din aria sectorului aria triunghiului isoscel format de raze cu coarda. $S_{sector}=R^2(\pi n/360 - (\sin(n))/2)$



9.Triunghiul echilateral

Aria, in functie de latura este egala cu $S_3=(l^2_3\sqrt{3})/4$, unde l_3 a_3 ,R este latura, apotema triunghiului si raza cercului circumscris.

$l_3=2R\sin 60^0$, $a_3=R\cos 60^0$, $S_3=p\cdot a_3$, unde
p=semiperimetrul=$(3\cdot l_3)/2$, $S_3=3R^2\sin 60^0\cos 60^0$

9.Aria patratului este egala cu latura la patrat(la puterea a doua). Perimetrul patratului este de 4 ori latura. □
$S_4= l^2_4$, Perimetrul=$4\cdot l_4$

9.Aria hexagonului:
Relatii intre : arie , perimetru , latura, raza , apotema
Latura $l_6=R$, $a_6=R\sqrt{3}/2$
$A_{⬡}= 3\cdot l_6\cdot a_6=6\cdot BC\cdot OM/2= 3\cdot R^2\sqrt{3}/2$,
Perimetrul, $P_{⬡}=6\cdot l_6=6\cdot AB=6\cdot R$