

1.Multimi

Definitie

Multimea este o colectie de obiecte/simboluri. Fiecare obiect dintr-o multime este un element al multimii si este scris/specificat o singura data. Mutimile se noteaza , de obicei cu litere mari din alfabet, folosind acoladele.

$A=\{1;2;3\}$ sau $B=\{a,0,4,k,-7\}$ sau $C=\{x/x \in \mathbb{N} \text{ si } x < 9\}$

O multime poate fi definita indicind/scriind toate elementele sale intre acolade(vezi multimea A sau B) sau indicind proprietatea caracteristica a elementelor sale(vezi C).

Relatia de apartenenta

Spunem ca 1 apartine multimii A si scriem $1 \in A$, pentru ca am scris mai sus multimea A si 1 este scris intre acolade. Tot asa $1 \in C$, pentru ca $1 < 9$ si $1 \in \mathbb{N}$, aceasta fiind definitia lui C(nr. $\in \mathbb{N}$ si < 9).

Spunem ca 4 nu apartine multimii A si scriem $4 \notin A$, dar 4 apartine multimii B, deci $4 \in B$, etc...

Multimea C, definita/scrisa prin proprietatea caracteristica a elementelor sale poate fi scrisa/definita/explicitata si prin indicarea elementelor sale : $C=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Relatia de apartenenta a unui element la o multime se indica prin simbolul \in .

Multimea fara nici un element o vom numi multime vida si o vom nota cu simbolul Φ .

De exemplu multimea oamenilor care cintaresc 10000 de kg nu are nici un element.

Multimea solutiilor intregi ale ecuatiei $2x+3=0$ este multimea vida, adica Φ .

Intr-o multime ordinea elementelor nu conteaza:

$A=\{1;2;3\}=\{1;3;2\}=\{3;1;2\}=\dots$

$D=\{1;2;3;1\}$ nu este o multime pentru ca 1 este scris de doua ori.

Multimi egale

Doua multimi sunt egale daca au aceleasi elemente. Daca $A=G$ atunci $G=\{1;2;3\}$.

Se vede ca $A\neq B$ si $A\neq C$.

Relatia de incluziune(\subset)

Multimea $E=\{1;3\}$ este formata cu o parte din elementele lui A , de aceea spunem ca E este o parte sau o submultime a lui A , si scriem $E\subset A$, adica E este inclusa in A . Semnul \subset este operatia de incluziune. $\{3;5;6\}\subset C$, $\{4;k\}\subset B$

Operatii cu multimi

Intersectia(\cap)=partea comuna:

Multimea A si multimea C au elemente comune, multimea acestor elemente comune este o alta multime notata $A\cap C$, deci $A\cap C=\{1;2;3\}$. Operatia \cap se numeste intersectie de multimi.

$B\cap C=\{0;4\}$. Daca $F=\{34;12\}$ atunci $F\cap C=\Phi$, adica nu au elemente comune. $\{a;3;6\}\cap C=\{3;6\}$

Reuninea(\cup)=partea comuna si necomuna:

O multime formata din elementele comune si necomune a doua multimi, fiecare scris o singura data, se numeste reuniunea celor doua multimi, iar operatia prin care se obtine se noteaza cu \cup .

De exemplu : $A \cup C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$, sau

$A \cup B = \{1;2;3; a,0,4,k,-7\}$, $A \cup F = \{1;2;3;34;12\}$.

Diferenta(\setminus sau $-$)=sunt in prima nu sunt in a doua:

Diferenta a doua multimi A si B este o multime formata din elementele care sunt in A si nu sunt in

B, si scriem $A-B$ sau $A \setminus B$. De exemplu $A \setminus C = \Phi$,

$A \setminus B = \{1;2;3\}$, $B \setminus C = \{a,k,-7\}$, $C \setminus A = \{0;4;5;6;7;8\}$...

Complementara=nu sunt in multime:

Complementara multimii A in raport cu multimea B este multimea formata din elementele care nu sunt in A si sunt in B, si notam aceasta multime

cu $C_B A = \{a,0,4,k,-7\}$, $C_C A = \{0;4;5;6;7;8\}$,

$C_B C = \{ a,k,-7\}$, ...

Are sens sa scriem si $C A = \{x/x \notin A\}$, subintelegind ca ne raportam la multimea totala pe care o cunoastem sau in care operatiile au sens sau sunt definite. In N , $C A = \{x/x \notin A \text{ si } x \in N\}$...

Produs cartezian(\times)=multimea perechilor

$A \times B = \{(x,y) / x \in A \text{ si } y \in B\}$, are

$\text{card}(A \times B) = (\text{card}A) \times (\text{card}B)$ elemente.

Fie $R = \{1;2;3\}$ si $S = \{a ;b\}$

$R \times S = \{(1,a) ;(1,b) ;(2,a) ;(2,b) ;(3,a) ;(3,b)\}$

$S \times R = \{(a,1) ;(a,2) ;(a,3) ;(b,1) ;(b,2) ;(b,3)\}$

Multimi de numere

Multimea numerelor naturale, notata cu N este definita astfel $N = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$, orice element al acestei multimi se obtine din precedentul adunind 1, adica $n = (n-1) + 1$, oricare ar fi $n \in N \setminus \{0\}$.

$N^* = \{x / x \in N \text{ si } x \neq 0\}$, adica este N fara elementul 0.

Numerele naturale de forma $2k$, $k \in N$ se numesc numere pare (se impart exact la 2) sau numere cu sot, iar cele de forma $2k+1$ se numesc numere impare/fara sot (dau restul 1 prin impartire la 2).

Partitionarea lui N

Fie $N_1 = \{x / x = 2k+1, k \in N\}$ si $N_2 = \{x / x = 2k, k \in N\}$ cele doua multimi/submultimi/parti in care a fost impartita multimea numerelor naturale N (numere care se impart exact la 2 si numere care nu se impart exact la 2 - numere cu sot/fara sot sau pare/impare), deci $N = N_1 \cup N_2$.

Daca impartim numarul natural a la k , atunci restul impartirii este $\{0; 1; 2; 3; \dots; k-1\}$. De exemplu, prin impartire la 3 resturile pot fi 0; 1; 2 si deci orice numar natural se poate scrie sub forma $3k$; $3k+1$; $3k+2$, etc ... Fie $N_1 = \{x / x = 3k+1, k \in N\}$ si $N_2 = \{x / x = 3k+2, k \in N\}$ si $N_3 = \{x / x = 3k, k \in N\}$, rezulta ca $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

Concluzia este ca orice numar natural realizeaza o partitie a lui N asa cum ati vazut mai sus ca face 2 si 3. Si dupa cum observati N are un numar infinit de elemente, dar la fel are si N_1, N_2 sau N_1, N_2 si N_3 . Cu alte cuvinte N poate fi pus in

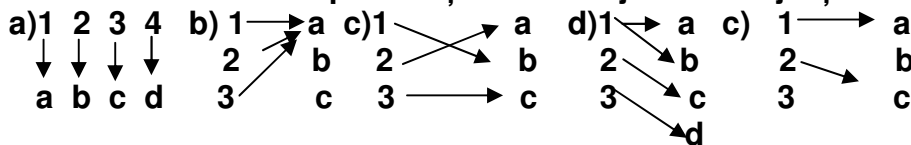
corespondenta biunivoca(de tip unu la unu) cu o parte proprie a sa, cu N_1 sau N_2 de exemplu.

Bijectii/corespondente biunivoce.Numarare.

O corespondenta biunivoca sau o functie bijectiva sau o bijectie cum se mai spune leaga un element din multimea X cu un singur element din multimea Y si nu ramin elemente din X nelegate, prin intermediul unui tabel sau diagrama(cu sageti) sau a unei relatii de tipul $f(x)=x+3$, de exemplu.

Bijectia este o legatura de tipul unu-la-unu.

Ex. Care dintre corespondențele de mai jos este bijectie :



Putem defini o functie printr-un tabel sau cu ajutorul unei formule :

A	1	2	3	4	sau	1	2	3	sau	1	→	2
B	2	4	6			2	4	6		2	→	4
						3	6			3	→	6

Aceste tabele definesc o functie între A și B , iar $G=\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ este graficul functiei. Se observă că săgețile unesc toate elementele din A cu toate elementele din B, și din fiecare x pleacă o singură săgeată=bijectie.

Un tabel pentru bijectia dintre N si N_1 ar putea fi urmatorul

N	0	1	2	3	4	5	6	...	n
N_1	1	3	5	7	9	11	13	...	$2n+1$

Se vede din acest tabel ca, oricit ar parea de ciudat, N si N_1 au acelasi numar de elemente.

De asemenea, ca am gasit un mod de a numara elementele lui N_1 , punind in corespondenta (cu sageti) elementele lui N_1 si N. Multimile care pot fi puse in corespondenta biunivoca, cu N, si evident si N, sunt multimi numarabile(le putem numara elementele). Numarul de elemente al unei multimi il vom nota cu $cardX$ sau $card(X)$, si se citeste cardinalul multimii X.

Deci $card(N)=card(N_1)=card(N_2)$.

Numere prime. Descumpunerea in factori primi.

Un numar natural care nu se impart la alte numere diferite de 1 si de el insusi se numeste numar prim. De exemplu 2;3;5;7;11;13;17;19; etc... sunt numere prime. Se observa ca 2 este singurul numar prim par, toate celelalte sunt impare, altfel s-ar impart exact la 2 si ar fi de forma $2x > 2$, deci nu ar mai fi prime(de exemplu 6; 24; 60; 100 etc...). Descumpunerea unui numar natural in factori primi inseamna sa scriem acel numar ca un produs de numere prime. De exemplu : $6=2 \cdot 3$, $24=2^3 \cdot 3$, $75=5^2 \cdot 3$, $300=2^2 \cdot 5^2 \cdot 3$, etc ...

Divizibilitate. Criteriile de divizibilitate:

- a) Un numar care are ultima cifra 0;2;4;6;8 este divizibil(se imparte exact) cu 2.
- b) Un numar care are ultima cifra 0 sau 5 este divizibil cu 5.
- c) Un numar care are ultima cifra 0 este divizibil cu 10.
- d) Un numar care are ultima cifra 00 este divizibil cu 100.
- e) Un numar care are suma cifrelor un numar care se imparte exact la 3 este divizibil cu 3.
- f) Un numar care are suma cifrelor un numar care se imparte exact la 9 este divizibil cu 9.
- g) Un numar care are ultimele doua cifre 00; 25; 50 sau 75 este divizibil cu 25.
- h) Un numar care are ultimele doua cifre un numar care se imparte exact la 4 este divizibil cu 4.

Daca a se imparte exact la b , spunem ca a este divizibil cu b si scriem $a : b$, (am folosit 3 puncte suprapuse), sau scriem $b | a$, si citim b este un divizor al lui a . Orice numar natural are cel putin 2 divizori, pe 1 si pe el insusi, pe care ii vom numi divizori improprii. Anumite numere naturale au si alti divizori decat pe 1 si numarul insusi, acestia se numesc divizori proprii. De exemplu multimea divizorilor lui 12, notata cu $D_{12}=\{1;2;3;4;6;12\}$. Dintre acestia 1 si 12 sunt divizori improprii, iar 2;3;4 si 6 divizori proprii.

Numarul divizorilor este legat de exponentii din descompunerea numarului prin relatia :
daca $a=x^m y^n z^k$, atunci numarul divizorilor lui a este egal cu $(m+1)(n+1)(k+1)$, etc... Evident pot fi mai mult de 3 factori in descompunere sau mai putini.

Cel mai mare divizor comun(c.m.m.d.c)

Daca avem doua sau mai multe numere naturale atunci cel mai mare divizor comun al lor (notat prescurtat c.m.m.d.c sau numerele puse intre paranteze $=(a,b)$) este numarul egal cu produsul factorilor comuni din descompunerea lor, luati o singura data la puterea cea mai mica.

De exemplu $12=2^2 \cdot 3$, iar $40=2^3 \cdot 5$ au ca c.m.m.d.c al lor numarul $2^2=4$. Numerele $12=2^2 \cdot 3$ si $120=2^3 \cdot 5 \cdot 3$ au ca c.m.m.d.c al lor numarul $2^2 \cdot 3=4 \cdot 3=12$, etc...

Ex. Aflati $(a;b)$ pentru numerele: a) 38 si 57 b) 60, 72 si 108 c) 78, 195, 390 si 312 d) 150, 375, 225 si 975 e) 36, 90, 126, 108 si 180 f) 70, 140, 245 si 350

Cel mai mic multiplu comun(c.m.m.m.c)

Spunem ca a este multiplul lui b daca exista c astfel ca $a=bc$, unde $a,b,c \in \mathbb{N}$. De exemplu $6=2 \cdot 3$, deci 6 este un multiplu pentru 2 si respectiv 3.

Orice numar de forma $2k$, $k \in \mathbb{N}$ este un multiplu al lui 2, $3k$ este multiplu al lui 3, $7k$ este multiplu al lui 7, $8k$ este multiplul lui 8, etc...

Daca avem doua sau mai multe numere naturale atunci cel mai mic multiplu comun al lor (notat prescurtat c.m.m.m.c sau cu $[a,b]$, numerele puse intre paranteze drepte= $[a,b]$) este numarul egal cu produsul factorilor comuni si necomuni din descompunerea lor, luati o singura data la puterea cea mai mare.

De exemplu $12=2^2 \cdot 3$, iar $40=2^3 \cdot 5$ au ca c.m.m.m.c al lor numarul $2^3 \cdot 3 \cdot 5=120$. Numerele $12=2^2 \cdot 3$ si $120=2^3 \cdot 5 \cdot 3$ au ca c.m.m.m.c al lor numarul $2^3 \cdot 3 \cdot 5=120$, etc...

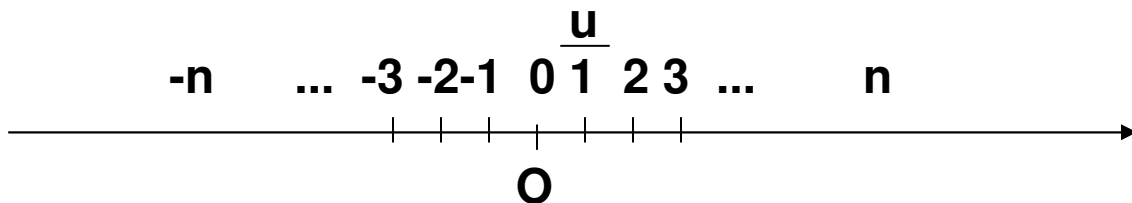
Numere intregi

Orice ecuatie de forma $x-a=0$, $a \in \mathbb{N}$ are solutie in \mathbb{N} si anume $x=a$. Ecuatiile de forma $x+a=0$ cu $a \in \mathbb{N}$, nu au solutii in \mathbb{N} , pentru ca $x=-a$, iar $-a \in \mathbb{Z}$.

Ecuatiile de forma $ax+b=0$ nu au intotdeauna solutii in \mathbb{N} , de exemplu: $2x-6=0$ are solutia $x=6:2=3$, dar $x+3=0$, nu are solutii in \mathbb{N} , dar are solutia $x=-3 \in \mathbb{Z}$, ecuatia $2x+3=0$ nu are solutii in \mathbb{N} , dar are solutia $x=-3/2 \in \mathbb{Q}$, etc...

Deci pentru ca astfel de ecuatii sa aiba solutii trebuie sa extindem multimea numerelor naturale cu numere de forma $-1; -2; -3; -4; \dots$ care se numesc numere intregi.

Cu Z notam multimea numerelor intregi si $Z = \{\dots, -n, \dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ care se reprezinta pe axa (o dreapta pe care fixam un punct O numit originea axei, un sens pozitiv de parcurs, de la stanga la dreapta si o unitate de masura notata cu u) numerelor astfel :



Modulul unui numar intreg este un numar pozitiv care se obtine din numarul dat suprimindu-i semnul. Deci $|x| = x$ daca $x > 0$, $|x| = 0$ daca $x = 0$ si $|x| = -x$ daca $x < 0$ si se vede ca $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in Z$. De exemplu: $|7| = 7$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$, $|1| = 1$, $|-1| = 1 \dots$ Opusul lui 1 este -1, al lui -7 este 7, etc..., in general, opusul lui a este $-a$.

Deci $Z = \{x / |x| \in N, \text{ unde } |x| = \text{modulul numarului } x\}$

Ar fi interesant sa ne punem problema numararii elementelor multimii Z , adica sa aflam $\text{card}(Z)$.

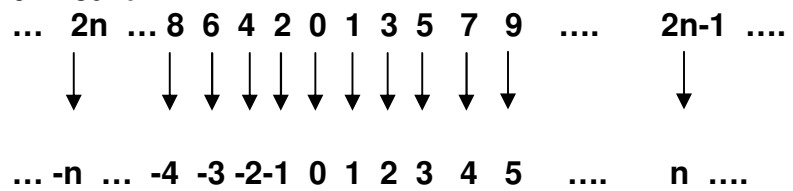
Un procedeu (o corespondenta biunivoca intre Z si N) de numarare se vede pe desenul urmator:

Fie $A=\{x \in \mathbb{N} / x=2n, n \in \mathbb{N}\}$, și $B=\{x \in \mathbb{N} / x=2n+1, n \in \mathbb{N}\}$, adică mulțimea numerelor naturale pare, respectiv impare. Sunt de asemenea două mulțimi infinite și numărabile, pentru că putem stabili o bijecție între \mathbb{N} și A , respectiv B .

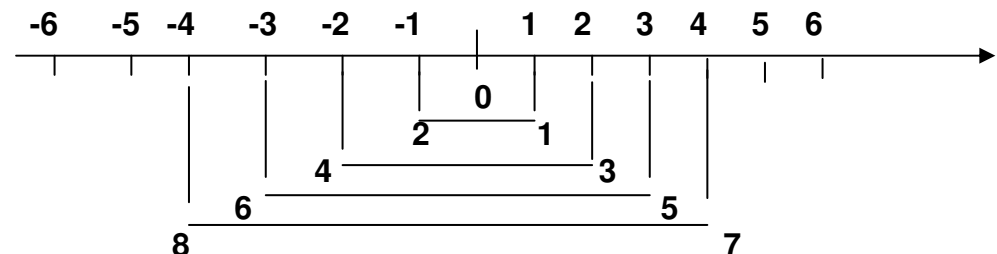


Asta înseamnă că \mathbb{N} , mulțimea numerelor naturale, are tot atâtea elemente ca și o parte a sa , mulțimea numerelor naturale pare , respectiv mulțimea numerelor naturale impare; deci dacă scoatem dintr-o mulțime numărabilă și infinită o parte numărabilă, ceea ce rămâne este tot o mulțime numărabilă și infinită.

Pentru mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} , putem stabili o bijecție după cum urmează:



Deci mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} este o mulțime infinită și numărabilă.



Obținem o altă formă grafică a aceleiași bijecții; deci un nou mod de a număra elementele mulțimii \mathbb{Z} .

Astfel ecuația $x+3=0$ are soluția $x=-3 \in \mathbb{Z}$.
De asemenea toate ecuațiile de forma $x+a=b$, unde $a,b \in \mathbb{Z}$ au soluții în \mathbb{Z} și anume $x=b-a \in \mathbb{Z}$.

Ecuatia $x+6=12$ are solutia $x=12-6=6 \in \mathbb{Z}$, ecuatia $x+25=7$ are solutia $x=7-25=-18 \in \mathbb{Z}$, daca $x-56=-109$ atunci $x=-109+56=-53 \in \mathbb{Z}$, etc...

Numere rationale

Dar ecuatia $2x-3=0$ are solutia $x=3/2$ care nu este numar intreg, $3/2 \in \mathbb{Q}$, ci numar rational. Suntem nevoiti astfel sa introducem o multime de numere mai cuprinzatoare decit \mathbb{Z} , multimea numerelor rationale/fractiile.

Cu \mathbb{Q} notam multimea numerelor rationale (fractiile) si vom scrie definitia lui \mathbb{Q} astfel:

$\mathbb{Q} = \{x/x=a/b, \text{ unde } a \in \mathbb{Z} \text{ si } b \in \mathbb{N} \text{ si } b > 0\}$ care se reprezinta pe axa numerelor asemanator cu \mathbb{Z} .

\mathbb{Q}^* este \mathbb{Q} fara 0, \mathbb{Q}_+ este nr. \mathbb{Q} pozitive, \mathbb{Q}_- este nr. \mathbb{Q} negative, etc...

Observam ca $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, atunci cind numitorul fractiei este 1, $a/1=a \in \mathbb{Z}$, adica $2/1=2$, $5/1=5$, $-21/1=-21$, etc...

Fractiile se scriu de obicei asa $\frac{a}{b}$ dar din motive

de scriere pe calculator si de economie de spatiu vom scrie si a/b .

De exemplu $T = \{-9; 2/3; -7; -7/4; 0; 87; 1/2; 5/1\} \subset \mathbb{Q}$.

Astfel ecuatia $2x-3=0$ are solutia $x=3/2 \in \mathbb{Q}$.

Si, in general, ecuatia $ax+b=0$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$ are in \mathbb{Q} solutia $x=-b/a \in \mathbb{Q}$, si ec. $ax+b=c$, $x=(c-b)/a \in \mathbb{Q}$.

Orice numar rational se poate scrie si sub forma zecimala: 2,5 sau 3,123 sau 0,009, sau 0,(12) cum se scriu fractiile periodice simple, sau 1,3(56) cum

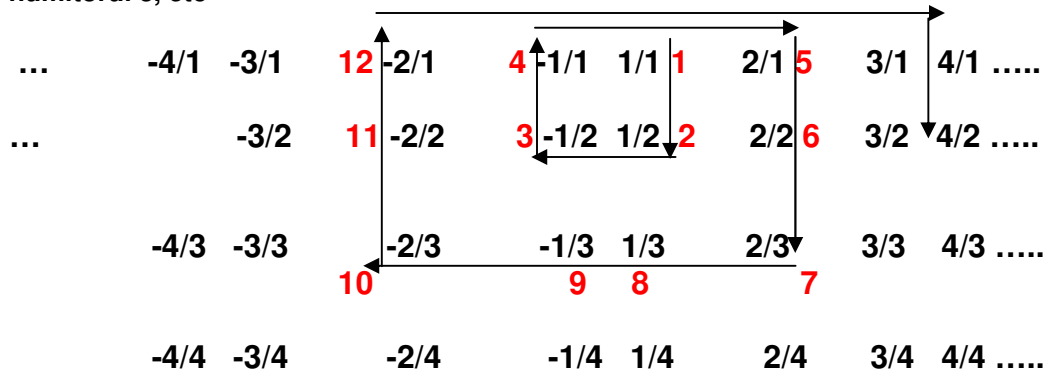
se scriu fractiile periodice mixte, etc ... ,cu numar finit sau infinit(fractii periodice simple si fractii periodice mixte) de zecimale. De exemplu $5:2=2,5$ sau $2,5$ este solutia ecuatiei $2x-5=0$. Dar $5/3=1,(6)$. Se observa pe axa, ca N si Z sunt multimi discrete de puncte, adica intre doua numere succesive (unul dupa altul/difera prin 1, de exemplu n si $n+1$) nu sunt alte numere din N respectiv Z (sunt "goluri"). De exemplu intre 2 si 3 nu mai exista alt numar din N sau Z . Multimea Q , a numerelor rationale, are o proprietate interesanta, anume , intre doua numere rationale x si y exista o infinitate de alte numere rationale: intre doua numere rationale exista un numar rational care este media lor aritmetica, deci intre x si y (la mijloc) exista $(x+y)/2$, $x < (x+y)/2 < y$, dar si intre x si $(x+y)/2$ exista media lor aritmetica, si tot asa la infinit, adica intre $x, y \in Q$ sunt o infinitate de $n \in Q$. Deci media aritmetica a doua numere este semisuma lor, se noteaza cu m_a si se defineste : $m_a = (x+y)/2$. Rezulta ca daca $x < y$ atunci $x < m_a < y$.

Deci, $x < y$ inseamna $x - y < 0$, dar $x - m_a = x - (x+y)/2 = (2x - x - y)/2 = (x - y)/2 < 0$ si rezulta $x < m_a$. Tot asa, din $m_a - y = (x+y)/2 - y = (x+y-2y)/2 = (x-y)/2 < 0$, rezulta a doua inegalitate, $m_a < y$, etc..., ceea ce demonstreaza dubla inegalitate.

Si multimea Q, a numerelor rationale este o multime numarabila:

NB. Deci a număra elementele lui A înseamnă a stabili o bijecție între N și A, printr-un tabel sau prin sageti sau printr-o relatie.

Observație: N și Z sunt mulțimi numărabile și infinite, iar $N \subset Z \subset Q$. Știm că și Q, mulțimea numerelor raționale este o mulțime infinită pentru că $N \subset Z \subset Q$. Să vedem dacă Q este o mulțime numărabilă. Facem un tabel care are pe primul rând toate fracțiile, pozitive și negative cu numitorul 1, pe rândul doi cele cu numitorul 2, pe rândul 3 fracțiile cu numitorul 3, etc



Pe laturile pătratelor desenate de noi numărăm fracțiile (numerele raționale), așa cum arata numerele rosii (este un procedeu), și deci Q este numărabilă.

Ex.

Matematicianul X-sirius, a primit în vizită, într-un hotel intergalactic cu un număr infinit de camere, ca oaspeți, pe toți matematicienii din toate galaxiile. Spre surprinderea lui, la sosire toți aveau câte o șapcă pe cap; toți și-au scos șepcile și le-au lăsat în hol. La plecare, spre surprinderea gazdei, s-a constatat că lipsea o șapcă, deși nu a dispărut nici o șapcă și nici nu a plecat vreun matematician fără șapcă. La un alt simpozion, cu aceeași participanți, și în aceleași condiții, la plecare a rămas o șapcă, deși când au sosit oaspeții în hol nu era nici o șapcă, iar între timp nici un matematician nu se pierduse. La o altă întâlnire în aceleași condiții ca mai sus, la plecarea matematicienilor se observă că în hol rămân tot atâtea șepci câte erau înaintea plecării oaspeților, deși fiecare a plecat cu o șapcă pe cap. În fine, la a patra întâlnire cu aceiași matematicieni, toți au venit cu capul descoperit, dar la plecare și-au luat șepcile rămase de la ultima lor vizită, și totuși în hol au rămas tot atâtea șepci câte erau înaintea plecării matematicienilor. Cum se explică totuși aceste fapte paradoxale?

Să ne întoarcem acum, la ecuațiile de tipul $2x+5=4$, cu soluția $x=(4-5)/2=-1/2$, număr rațional(Q). Să observăm că ecuația $2x=3$, nu are nici ea soluții în N și nici în Z pentru că $x=3:2=1,5 \in Q$. Deci în Q putem rezolva orice ecuație de forma $ax+b=c$, $a,b,c \in Q$, cu soluția generală $x=(c-b)/a \in Q$. Să rezolvăm acum următoarele ecuații:

- a) $3x-1=5$ b) $5x+17=23$ c) $7x-5=11$ d) $23x+4=43$
 e) $11x+2 \cdot 3=72$ f) $3(1-2x)=23$ g) $1-3(2x-5)=17$
 h) $2x-5(1+2x)=21$ i) $(3-5x):5=34$ j) $128:2^3-2(4x+3)=1$

Numere reale(R)

Si totusi intre doua numere rationale exista si “goluri”, adica altfel de numere, care nu sunt rationale.

De exemplu diagonala unui patrat cu latura 1 este un numar care nu este rational si pe care-l notam cu $\sqrt{2}$. Exista si alte numere care nu sunt rationale si pe care le vom numi numere irrationale : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{21}$ etc...

Aceste numere impreuna cu numerele Q formeaza o multime mai cuprinzatoare pe care o notam cu R si o numim multimea numerelor reale.

Numarul $0,10100100010000\dots$ este, de asemenea un numar irational. Avem incluziunea $N \subset Z \subset Q \subset R$. Trebuie spus ca R este o multime continua, adica intre doua numere reale nu exista alte numere de alta natura (care nu sunt reale). Deci pe axa intre doua puncte nu exista goluri, R acopera toata dreapta reala, adica putem defini o corespondenta biunivoca (fiecare numar din R are un punct pe axa si pentru fiecare punct de pe axa avem un numar in R) intre R si punctele drepte.

Operatii cu numere reale

Am studiat trei perechi de operatii opuse una alteia : radicali si exponentiale, inmultiri si impartiri, adunari si scaderi.

Acestea sunt cele 6 operatii aritmetice pe care le-am studiat pina in clasa 8-a, iar ordinea in care ele se efectueaza, daca nu sunt paranteze care sa schimbe aceasta ordine, este cea indicata mai sus. Adica : $12-2\cdot 3=12-6=6$ si nu $12-2\cdot 3=10\cdot 3=30$,

adica am efectuat gresit intii scaderea $12-2=10$ si apoi inmultirea $10\cdot 3=30$ (ceea ce este gresit).

Ex.1 Efectuati:

a) $1+3$ b) $5\cdot 3$ c) $10+5\cdot 3$ d) $20-5\cdot 3$ e) $10\cdot 3+4\cdot 7$ f) $12\cdot 5-14\cdot 2$ g) $2^3+4\cdot 5$ h) $3^3-6\cdot 4$ i) $5^3-7\cdot 10$ j) $4^3+6^2\cdot 5$

Daca sunt prezente parantezele, atunci regula este ca se fac mai intii operatiile din paranteza conform cu ordinea indicata mai sus.

De exemplu: $2^3+4\cdot(5+2)=2^3+4\cdot 7=8+28=36$, sau $2^3+4\cdot(5+2\cdot 3)=2^3+4\cdot(5+6)=8+4\cdot 11=8+44=52$ sau $2^3+4\cdot(45-7\cdot 2)=2^3+4\cdot(45-14)=2^3+4\cdot 31=8+124=132$ sau $14\cdot 5+6\cdot(2^3+4\cdot 5)=70+6\cdot(8+20)=70+6\cdot 28=70+168=238$, etc...

Ex.2 Efectuati:

a) $1+3\cdot(3+7)$ b) $-5\cdot 3+2\cdot(3+7)$ c) $10\cdot(3-2\cdot 7)+5\cdot 3$ d) $120-5\cdot 3\cdot(3-7)$ e) $-10\cdot 3\cdot(3+7)-7\cdot(3+7)$ f) $12\cdot 5\cdot(3+7)-14\cdot 2$ g) $-2^3\cdot(3+7)+4\cdot 5$ h) $3^3\cdot(3+7)-60\cdot 45$ i) $5^3\cdot(3+2\cdot(3+7))-7\cdot 10$ j) $-4^3\cdot(3+2\cdot 7)+6^2\cdot 5$ k) $5\cdot(7+2\cdot(3-2\cdot 7))-12\cdot(3+7\cdot 3)$ l) $4\cdot(3-4\cdot 7)-15\cdot 3$ m) $24:(5+7)-2$ n) $48: 2\cdot(3+5)-20:10$ o) $-12:(2\cdot 3+6)$ p) $-48: ((2\cdot(3+5))-20:10)$ r) n) $48: 2\cdot(3-5)-20:10$

Pentru a face calcule cu numere rationale(Q) trebuie sa respectam urmatoarele reguli:

- $a/a=1$, $0/a=0$, de exemplu: $5/5=1$, $0/7=0$,
- simplificarea fractiilor $(ax)/(bx)=a/b$, sau $a/(ax)=1/x$, adica impartim si numaratorul si numitorul cu acelasi numar, de exemplu $6/30=6/(5\cdot 6)=1/5$, am simplificat cu 6,

$48/60=(4 \cdot 12)/(5 \cdot 12)=4/5$, am simplificat cu 12, etc... ,

c) amplificarea fractiilor, $a/b=(ax)/(bx)$, adica inmultim si numaratorul si numitorul cu acelasi numar, de exemplu :

$8/5=(8 \cdot 8)/(5 \cdot 8)=64/40$, am amplificat cu 8, etc...

Ex.3 Simplificati:

a) $33/22$ b) $15/3$ c) $105/10$ d) $202/44$

Ex.3 Amplificati cu 5 fractiile:

a) $3/2$ b) $5/2$ c) $53/10$ d) $25/40$

d) Inmultirea fractiilor cu numere Z, $a \cdot (b/c)=(ab)/c$

De exemplu: $2 \cdot (3/4)=(2 \cdot 3)/4=(2 \cdot 3)/(2 \cdot 2)=3/2$

$-15 \cdot (7/20)=(-15 \cdot 7)/20=(-3 \cdot 5 \cdot 7)/(5 \cdot 4)=(-3 \cdot 7)/(4)=-21/4$

$-2(3+4)=-2 \cdot 7=-14$, $-(3+4)=-7$, $-(3-4)=-(-1)=+1$,

$-(-3+4)=-(-1)=-1$, $-(3+4)=-3-4=-7$, $-(3-4)=-3+4=+1$

e) Inmultirea fractiilor , $(a/b) \cdot (c/d)=(ac)/(bd)$

De exemplu: $(2/3) \cdot (3/4)=(2 \cdot 3)/(3 \cdot 4)=2/(4)=2/(2 \cdot 2)=1/2$

$(15/7) \cdot (7/20)=(15 \cdot 7)/(7 \cdot 20)=(3 \cdot 5 \cdot 7)/(7 \cdot 5 \cdot 4)=3/4$

f) Introducerea intregilor in fractie

$a \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$ si se citeste a intregi si b/c

c c

Operatia aceasta se numeste introducerea intregilor in fractie.

De exemplu: $5 \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 2 + 3}{2} = \frac{13}{2}$

g) Scoaterea intregilor din fractie

Exista si operatia inversa, scoaterea intregilor din fractie, $\frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$

$$\frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

Pur si simplu impartim pe 13 la 2 si obtinem citul 6 si restul 1, deci 6 intregi si o doime = $1/2$.

b) Adunarea fractiilor care au acelasi numitor

$a/b + c/b = (a+c)/b$, de exemplu :

$$1/2 + 3/2 = (1+3)/2 = 4/2 = 2,$$

$$7/12 + 15/12 = (7+15)/12 = 22/12 = (2 \cdot 11)/(2 \cdot 6) = 11/6,$$

Ex.3 Efectuati:

a) $1/2 + 3/2$ b) $5/2 - 3/2$ c) $1/10 + 5 \cdot 3/10$ d) $20/4 - 2 \cdot 5/4$

e) $(10/7) \cdot 3 + 4/7$ f) $14/5 - 4 \cdot (2/5)$ g) $2^3/15 + 4/15$

h) $3^3/25 - 6 \cdot 4/25$ i) $5^3/3 - 7 \cdot 10/3$ j) $4^3/72 + 6^2 \cdot 5/72$

h) Cum adunam numere din Z cu fractii

$a + c/b = (ab+c)/b$, de exemplu :

$$1 + 3/2 = (1 \cdot 2 + 3)/2 = 5/2 = 2,5 \text{ sau } -1 + 3/2 = (-1 \cdot 2 + 3)/2 = 0,5$$

$$12 + 15/12 = (12 \cdot 12 + 15)/12 = 159/12$$

Ex.3 Efectuati:

a) $1 + 3/2$ b) $5 - 3/2$ c) $-10 + 5 \cdot 3/10$ d) $20 - 2 \cdot 5/4$

e) $(10/7) \cdot 3 - 4 \cdot 1/7$ f) $-14/5 - 4 \cdot (2/3)$ g) $2^3/5 - 4 \cdot 5$

h) $3^3 - 6 \cdot 4/5$ i) $5^3 - 7 \cdot 10/3$ j) $4^3 + 6^2 \cdot 5/72$

i) Cum adunam fractii care au numitori diferiti.

Daca trebuie sa facem calcule cu fractii care au numitori diferiti, de tipul $a/b + c/d$ atunci trebuie

mai intii sa aducem fractiile la acelasi numitor comun si dupa aceea trebuie sa aplicam una din regulile de mai sus, de exemplu :

$$1/6+3/5 = (5\cdot 1+3\cdot 6)/(6\cdot 5)=23/30$$

$$5/12+7/15=(5\cdot 15+7\cdot 12)/(12\cdot 15)=(75+84)/(180)=159/180 =53/60, \text{ dupa simplificarea cu } 3.$$

Aceasta simplificare ne determina sa gasim o regula mai eficienta pentru a aduna sau scadea fractii . Regula este : numitorul comun este cel mai mic multiplu comun al numitorilor.

$$12/25+17/60=(12\cdot 12+17\cdot 5)/300=(144+85)/300=229/300, \text{ numitorul comun este}$$

$$[25;60]=300=5^2\cdot 3\cdot 2^2 \text{ si nu } 25\cdot 60=1500.$$

Avantajul este ca lucram cu numere mai mici, dar daca nu stiti regula, aveti un exemplu mai sus.

$$4/15+3/25=(4\cdot 5+3\cdot 3)/75=29/75$$

$$6/28+5/49=(6\cdot 7+5\cdot 4)/196=62/196=31/98$$

$$9/34-7/51=(9\cdot 3-7\cdot 2)/102=13/102$$

Ex. Efectuati: a) $3/28 + 11/28$ b) $7/12 - 5/12$

d) $17/55 - 8/55$ d) $13/32 + 5/32 - 14/32$

e) $21/65 - 8/65 + 4/5$ f) $12 + 3/5$ g) $23 - 2/3$

i) $17 + 4/7$ i) $33 - 5/6$ j) $3/7 + 5/9$ k) $12/11 - 4/5$

l) $32/105 + 7/21 - 8/15$ m) $7/36 - 5/18 + 11/30$

n) $9\cdot(3/4) - 7/36 + 4(2/3 - 5)$ o) $12\cdot(12/37) - 4 +$

$41/37$ p) $(2/3)(1/5 - 3/4)60 + 22$ r) $15/31 - 1/4 +$

$2/31$ s) $12/17 + 3/5 + 69/85 - 38/19$ t) $14(3 - 2/5)$

$+ 18/5 - 40$ u) $5(3/4 - 11(1/2 - 3/11)) + 1/2$

v) $((5/9)(1 - (2 + 1/5)/4)/21)84 - 1$ z) $(3/5 - 7)(5/2^3)/4$

Puteri

Pentru a face calcule cu puteri trebuie sa respectam urmatoarele reguli:

a) $2^2=2\cdot 2=4$, $2^3=2\cdot 2\cdot 2=4\cdot 2=8$, $2^4=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=4\cdot 2\cdot 2=8\cdot 2=16$, etc ..., in general $a^n=a\cdot a\cdot a\cdot \dots \cdot a$, unde a este scris de n(cit arata exponentul) ori in produs.

b) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, astfel ca $2^3\cdot 2^4=2^{3+4}=2^7$, $2^2\cdot 2^6=2^{2+6}=2^8$, etc...

c) $(a^m)^n=a^{mn}$, deci $(2^3)^4=2^{3\cdot 4}=2^{12}$, $(2^2)^5=2^{2\cdot 5}=2^{10}$

d) $a^m:a^n=a^{m-n}$, astfel ca $2^7:2^4=2^{7-4}=2^3$, $2^8\cdot 2^3=2^{8+3}=2^{11}$

e) $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$, astfel ca $(2\cdot 3)^4=2^4\cdot 3^4$, $(3\cdot 5)^6=3^6\cdot 5^6$

f) $a^0=1$, $a^1=a$, operatia 0^0 = nu are sens, dar $0^n=0$ daca $n>1$

g) a^{n^m} se calculeaza mai intii $k=n^m$ apoi se calculeaza a^k , de exemplu $2^{3^2}=2^9=512$, in timp ce $(2^3)^2=2^6=64$

h) $(a/b)^n=a^n/b^n$, ridicam si numaratorul si numitorul la acea putere, de exemplu :

$(2/3)^3=2^3/3^3=8/27$ sau $(1/5)^4=1^4/5^4=1/625$, etc...

$(2/3)^2\cdot (2/3)^3=(2/3)^{2+3}=(2/3)^5=2^5/3^5=32/243$

$((2/3)^3)^2=(2/3)^6=2^6/3^6=64/729$

$(2/3)^{31}:(2/3)^{28}=(2/3)^{31-28}=2^3/3^3=8/27$

$((2/3)(5/7))^2=((2\cdot 5)/(3\cdot 7))^2=(10/21)^2=100/441$

i) Regula semnelor :

La inmultire si impartire :

“plus cu plus da plus”, adica $(+)(+)=+$

“minus cu minus da plus”, adica $(-)(-)=+$

“plus cu minus da minus”, adica $(+)(-)= -$

“minus cu plus da minus”, adica $(-)(+)= -$

De exemplu: $(+2)(+7)=+14$, $(-2)(-7)=+14$, $(+2)(-7)=-14$,

$(-2)(+7)=-14$, $+(+7)=+7$, $+(-7)=-7$, $-(+7)=-7$, $-(-7)=+7$

Deci, la inmultire si impartire, daca numerele au acelasi semn rezultatul este pozitiv, daca numerele au semne diferite rezultatul este un numar negativ.

La adunare, daca numerele au acelasi semn, rezultatul are semnul comun, iar daca numerele au semne diferite rezultatul are semnul celui mai mare in valoare absoluta(modul). De exemplu:

$$+2+7=+9, -9-11=-20, (+5)+(+30)=+5+30=+35,$$

$$(-11)-(-12)=-11+12=+1, (-11)+(-12)=-11-12=-23,$$

$$(-31)-(-12)=-31+12=-19, (-31)+(-12)=-31-12=-43,$$

$$(+31)-(-12)=31+12=+43, (-31)-(+12)=-31-12=-43,...$$

Cind operam cu puteri regula este:

$$(-1)^{2k}=\text{pozitiv}(\text{pt.ca exponentul este numar par})$$

$$(-1)^{2k+1}=\text{negativ}(\text{pt.ca exponentul este numar impar})$$

$$\text{De exemplu: } (-2)^2=4, (-2)^4=16, (-2)^3=-8, (-2)^5=-32,...$$

Ex.3 Calculați: $10^2, 3^4, 2^{10}, -3^3, 5^4, -11^2, 13^2$

Ex.4 Calculați: $(2 \cdot 3)^4, (-3 \cdot 5)^3, (-2 \cdot 3 \cdot 4)^2$

Ex.5 Calculați: $(2^2)^4, (3^3)^2, (-3^2 \cdot 5)^3, (2 \cdot 3^2 \cdot 4^2)^2, ((2^3)^2)^3$

Ex.6 Calculați: $2^{25} : 2^{22}, (2^4)^3 : 2^3, 2^{35} : (2^3)^5,$
 $((-2 \cdot 5^2)^3)^2 : (2 \cdot 5^2)^4$

Ex.7 Calculați: $2^{3^2}, (-2^3)^2, 2^{4^{3^2}}, ((2^4)^3)^2, -5^{2^3} : 25^2,$
 $3^{(2^3)^4} : 3^2 \cdot 3^3, 3^{6^2} : (3^2 \cdot 3^3)$

Ex.8 Calculați: a) $2^6 \cdot 3^2 + (2^3 \cdot 3)^2 - (-2^2)^8 : 2^{3^2} + 1$
 b) $(2002 \cdot 2003 - 2002) : 2002^2$

Ex.9 Calculați: a) $2^6 - 5^2$ b) $3^4 + 5^8 : 5^5$
 c) $5^3 - 2^{10} : 2^6$ d) $3^2 - (4 \cdot 6)^2 + 2^5 \cdot 2^{10} - 1$

Ex.10 Calculați : a) $6+2[(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 2^2]$
 b) $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8 \cdot 1^0 - (3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6)$

Ex.11 Calculați : a) $(12 - 3 \cdot 2^2)^{2002}$ b) 2^{13} știind că $2^6 = x$

Ex.12 Calculați : a) $[(3^7)^3] - (3^3)^{7^2}$

b) $(5^7 \cdot 5^{8^2} \cdot 5^{3^2} + 5^5 \cdot 2^2 \cdot 5^{7^5}) : (5^2)^{10}$

Ex.13 Calculați : a) $3^2 + (-2^3 \cdot 3)^2 - 2^{16} : 2^{10} - 1$

b) $[1 + 2 \cdot 2^{49} + 2^{94} : 2^{14} + (-3^2)^{100}] : (1 + 2^{50} + 2^{80} + 3^{200})$

Ex.14 Calculați : $2^{3^2} + 3^2$, $(2^2)^5 - 2^{3^{21}}$, $2^{3^4} : (2^3)^4 : 2^3 : 2$

Ex.15 Calculați : a) $1 - (2^2 \cdot 3)^4 : (-2^2 \cdot 3)^4$

b) $(2^2)^0 - (2^{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2})^0$

Ex.16 Calculați : $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) : ((2^3)^2 - 2^0)$

Ex.17 Calculați : $x+y$ știind că $2^x \cdot 2^y = (6)^{15} : (3^3)^5$

Ex.18 Dacă $x+y+1=2^2$ cât este $(x+y+1)^{x+y}$?

Ex.18 Calculati : $S=1+2+3+ \dots +100$

$$P=2+2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$$

$$Q=3+3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$$

Generalizare .

Ex.18 Calculati : $x+y$ știind că $2^{x^2} \cdot 2^{3x+2} = (14)^{30} : (7^6)^5$

Ex.14 Calculați $(2^{3^2} + 3^2 + 1) / (1/9^2)$, $((2^2)^5 - 2^{3^2}) / 2^9$,

$(2^{3^4} : (2^3)^4 : 2^3 : 2) / (2^{25})^3$

Ex.11 Calculați : a) $(1/2 - 3/2^2)^{1003} (-2^{2007}) - 2$

b) $(1/2^{13} - 2^7) / (2^{13} / (2^{20} - 1))$ c) $((3/5)^2 - (1/2)^3) 100/71$

Ex.11 Calculați : a) $(1/2 - (3/2)^2)^3 / (-7^2) - 21/16$

b) $((1/2)^3 - 2^5) / (3/16)$ c) $((3/5)^2 - (2/5)^3)(25/43)$

Calculule cu radicali :

Reguli :

1) $\sqrt{a} = x$ daca $a \geq 0$, iar $x^2 = a$, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$,

3) $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$

4) $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

5) $a / \sqrt{b} = (a\sqrt{b})/b$ (rationalizarea numitorului)

6) $a/(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a(\sqrt{a} - \sqrt{b})/(a-b)$

Rationalizarea numitorului $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ se face amplificand cu $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ si folosind formula $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ sau inmultind direct $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a}\sqrt{a} - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}\sqrt{a} - \sqrt{b}\sqrt{b} = a - b$

7) $a/(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a(\sqrt{a} + \sqrt{b})/(a-b)$ (rationalizarea numitorului, am amplificat cu $\sqrt{a} + \sqrt{b}$)

8) $\sqrt{a^2} = |a|$

Ex.16 Calculați: $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{9}$
Folosind regula 1 de mai sus.

Ex.16 Calculați: $\sqrt{4+6}$, $\sqrt{16-3}$, $\sqrt{25+2 \cdot 3}$, $\sqrt{36-2^2}$,
 $\sqrt{121-4 \cdot 5}$, $\sqrt{81} : 6 - 1/2$, $\sqrt{9} \cdot 7 - 3 \cdot 4$

Ex.16 Rationalizati numitorii : $1/\sqrt{2}$; $2/\sqrt{3}$; $6/\sqrt{2}$;
 $15/\sqrt{6}$; $21/\sqrt{12}$; $28/\sqrt{21}$; $32/\sqrt{2^3}$, $25/\sqrt{15}$; $48/\sqrt{24}$

Ex.16 Rationalizati numitorii : $1/(1+\sqrt{2})$; $2/(2+\sqrt{3})$;
 $6/(3-\sqrt{2})$; $15/(\sqrt{6}-5)$; $21/(4-\sqrt{12})$; $28/(\sqrt{21}+\sqrt{2})$; $32/(1-\sqrt{2^3})$, $25/(5-\sqrt{15})$; $48/(\sqrt{24}-6)$

Numere reale(R)-continuare

Să ne întoarcem acum , la ecuații.

Să examinăm acum următoarele ecuații:

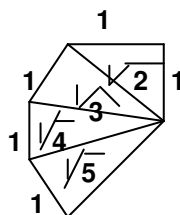
a) $x^2=1$	b) $x^2=4$	c) $x^2=25$	d) $x^2=2$
$x^2=1^2$	$x^2=2^2$	$x^2=5^2$	
$x=1$	$x=2$	$x=5$	

Observăm că nu există nici un număr în Q care ridicat la pătrat să fie egal cu 2, deci ecuația $x^2=2$ nu are soluții în Q. Ecuația $x^2=2$ ne conduce cu gândul la altfel de numere decât cele studiate până acum; aceste numere se numesc numere reale. Notăm cu R mulțimea numerelor reale, iar ecuația $x^2=2$ are 2 soluții în R notate cu $\pm\sqrt{2}$ și citim radical din 2. Rezultă că $(\sqrt{2})^2=2$, și $|\sqrt{a^2}|=|a|$

Aceste numere se scriu ca fracții zecimale neperiodice și cu un număr infinit de zecimale; de exemplu primele zecimale pentru $\sqrt{2}$ sunt $\sqrt{2} = 1,41\dots$

Numerele de forma, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ se numesc numere iraționale și formează o submulțime a numerelor reale; R cuprinde și mulțimea numerelor raționale, deci și pe N și pe Z, și avem incluziunile : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Din punct de vedere geometric $\sqrt{2}$ este lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de 1 m, sau 1 cm, etc. Pentru că $\sqrt{2}$ este un număr zecimal cu un număr infinit de zecimale și neperiodic, înseamnă că diagonala unui pătrat cu latura 1, nu poate fi măsurată cu exactitate. Și pentru că între laturile unui triunghi dreptunghic există relația dată de Pitagora: $a^2=b^2+c^2$ unde a este lungimea ipotenuzei, iar b și c lungimile catetelor, numerele de forma $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc., pot fi construite cu ajutorul unor triunghiuri dreptunghice :



Putem arăta și altfel că există și altfel de numere decât cele raționale. Fie numărul 0,101001000100001..... , care are după virgulă un număr infinit de zecimale, dar care nu este periodic(după virgulă are 1 și 1 de 0 , apoi iarăși 1, dar 2 de 0, apoi 1 și 3 de 0, etc), deci nu este rațional. Fie $A=\{0,a_1a_2a_3a_4\dots / \text{unde } a_n \text{ este cifră zecimală}\}$, mulțimea tuturor fracțiilor zecimale de forma $0,a_1a_2a_3a_4\dots$. Oare se pot număra elementele acestei mulțimi, adică putem construi o bijecție între N și A ? Adică putem găsi o formulă sau putem construi un tabel prin care între elementele lui N și elementele lui A să formăm perechi ? Să presupunem că există un astfel de tabel; este suficient să arătăm că putem construi o fracție care nu este în acest tabel ca să rezulte că mulțimea A nu este numărabilă. Pentru aceasta luăm prima zecimală după virgulă din prima fracție, dacă această zecimală este 0 noi punem 1 în noua fracție pe care o construim, dacă este 1 noi punem 0, apoi trecem la doua fracție și luăm a doua zecimală, dacă este 1 punem 0 , dacă este 0 punem 1, etc. Sigur fracția construită astfel nu este în tabel (diferă prin prima zecimală de prima fracție, prin a doua de a doua fracție,etc)și deci A nu este numărabilă, deci nici R care conține toate aceste fracții.

Să vedem acum dacă există și alte mulțimi infinite , dar nenumărabile. Să presupunem că avem un hotel cu 5 camere și că vrem să alcătuiim un tabel cu toate variantele posibile de ocupare a hotelului: pentru fiecare variantă vom scrie un șir de 5 cifre; pentru o cameră ocupată vom scrie cifra 1, iar pentru o cameră goală vom scrie cifra 0. Astfel varianta, 10010 arată că este ocupată camera 1 și camera 4, iar celelalte sunt libere. Pentru simplificare completăm mai întâi un tabel cu variantele de ocupare a unui hotel cu 3 camere:

1	0	1	0	0	1	1	0	1	Sunt, așa cum se vede, $8=2^3$ variante, dacă sunt 3 camere
2	0	0	1	0	1	0	1	1	
3	0	0	0	1	0	1	1	1	

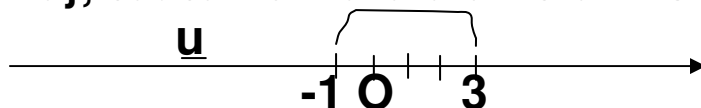
Pentru 5 camere sunt $32=2^5$ variante; încercați să scrieți tabelul. Ce se întâmplă, însă dacă hotelul are un număr infinit de camere? Putem scrie în acest caz un tabel cu toate variantele posibile, ceea ce înseamnă că putem număra aceste variante? La prima vedere răspunsul este, da. Totuși, dacă presupunem că există un astfel de tabel, se poate indica un procedeu de a construi o variantă care nu este în acest tabel. Și iată cum: dacă pe primul loc de pe primul rând din tabel este scris 1, noi scriem în noua variantă 0, iar dacă scrie 0 noi scriem 1, trecem pe rândul 2, dacă în poziția 2 scrie 1, în varianta nouă noi scriem 0, iar dacă scrie 0 noi scriem 1, etc.. În acest fel scriem o variantă nouă care nu este deja scrisă în tabel. Deci nu putem număra variantele de ocupare a unui hotel cu număr infinit și numărabil de camere. Deci mulțimea formată din toate variantele de ocupare a unui hotel cu număr infinit și numărabil de camere este o mulțime infinită, dar nenumărabilă. Deci \mathbb{R} este o mulțime infinită și nenumărabilă și $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Concluzia : multimile de numere \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) sau nascut din nevoia de a rezolva ecuatii de forma $ax+b=c$ si de forma $x^2=3$, etc..., iar in liceu vom studia ecuatiile de forma $x^2=-3$ si problema continuitatii in \mathbb{R} .

Intervale de numere reale

Interval inchis $[a;b]=\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, deci toate numerele reale dintre a si b , inclusiv a si b , numite marginile intervalului.

$[-1;3]=\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$, toate numerele dintre -1 si 3 , inclusiv -1 si 3 .



Interval deschis $(a;b)=\{x \in \mathbb{R} / a < x < b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, deci toate numerele reale dintre a si b , fara/ exclusiv a si b , marginile intervalului.

$(-1;3)=\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$, toate numerele dintre -1 si 3 , fara -1 si 3 .

Intrebare, caruia dintre cele doua intervale apartin numerele: 5 ; -2 ; $0,7$; $-0,5$; 2 ; 1 ; -1 ; $2,8$; $3,4$; 3 ; -3 ; $-1/2$; $-3/2$; $3/2$; $-1,99$; $0,45$; -2

Sau cit este : $[-1;3] \cap (-1;3)=?$, $[-1;3] \cup (-1;3)=?$,
 $C_{[-1;3]}(-1;3)=?$, $C_{(-1;3)}[-1;3]=?$, $C_{\mathbb{R}}(-1;3)=?$, $C_{\mathbb{R}}[-1;3]=?$,

Interval inchis la dreapta si deschis la stinga

$[a;b)=\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}\}$, deci toate numerele reale dintre a si b, impreuna cu a, dar fara b. De exemplu, intervalul:

$[-1;3)=\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 3\}$, adica toate numerele dintre -1 si 3, inclusiv -1, dar fara 3.

Interval inchis la dreapta si deschis la stinga

$(a;b]=\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}\}$, deci toate numerele reale dintre a si b, impreuna cu b, dar fara a.

$(-1;3]=\{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 3\}$, toate numerele dintre -1 si 3, inclusiv 3, dar fara -1.

Pe axa un interval de forma $[-1;3]$ este un segment de dreapta impreuna cu capetele sau fara , daca avem intervalul $(-1;3)$, sau impreuna cu unul din capete pentru intervalele $(-1;3]$ si $[-1;3)$.

Avem si intervale de forma :

$(-\infty;a]=\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq a, \text{ unde } a \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty;a)=\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < a, \text{ unde } a \in \mathbb{R}\}$

$[a;+\infty)=\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < +\infty, \text{ unde } a \in \mathbb{R}\}$

$(a;+\infty)=\{x \in \mathbb{R} / a < x < +\infty, \text{ unde } a \in \mathbb{R}\}$

Cind scriem $-\infty$, citim “minus infinit”, dar atentie, $-\infty$ nu este un numar, ci un simbol, care ne arata ca multimea respectiva nu are limite in stinga(cind o reprezentam pe axa), iar cind scriem $+\infty$, citim

“plus infinit” si acest simbol ne arata ca intervalul nu are limite in dreapta.

Reprezentarea acestor intervale pe axa este o semidreapta.

Toate operatiile cu multimii sunt valabile si functioneaza la fel in cazul intervalelor.

Ex.3 Scrieti sub forma de intervale multimile:

- a) $\{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 7\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 5\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leq 0\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < +\infty\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq 0\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < +\infty\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < -7\}$

Ex.3 Reprezentati pe axa intervalele:

- a) $[3;7]$ b) $[3;7)$ c) $(3;7]$ d) $(-3;3)$ e) $[0;5)$ f) $(-4;0]$
g) $[0;+\infty)$ h) $(-\infty;0]$ i) $[4;+\infty)$ j) $(-\infty;-7]$

Ex.3 Reprezentati pe axa multimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x < 5\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq -1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < +1\} \cap [-2;0]$
e) $[0;5) \cap (-1;3)$ f) $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 1\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 1\} \cap [-2;0]$ h) $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 2\} \cup (1;3]$

Ex.3 Aflati a si b pentru ca multimile sa fie egale:

- a) $(a;b) \cap (-1;11) = [3;7]$ b) $[a;b] \cap \{x \in \mathbb{R} / |x| < 8\} = [3;8)$
c) $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} / |x| < a\} = (1/3;1/2]$

Ex.3 Aratati ca daca $a \in \{x \in \mathbb{R} / |x| < 1\}$ atunci :

- a) $a^2 + 2a - 6 < 0$, b) $1 - a^2 > 0$, c) **daca $x \neq 0$, atunci $x^6 < x^5$.**

Rapoarte si proportii. Marimi direct si invers proportionale. Procente.

1. Daca $a/b=c/d$ atunci $ad=bc$ si reciproc, daca $ad=bc$ atunci $a/b=c/d$. $2/3=10/15$ si $2 \cdot 15=3 \cdot 10$

2. Daca $a/b=c/d$ atunci $b/a=d/c$ (pt.ca $ad=bc$).

3. Daca $a/b=c/d$ atunci $d/b=c/a$ (pt.ca $ad=bc$).

4. Daca $a/b=c/d$ atunci $a/c=b/d$ (pt.ca $ad=bc$).

5. Daca $a/b=b/c$ atunci $b^2=ac$, adica $b=\sqrt{ac}$ si spunem ca b este media proportionala sau media geometrica a numerelor a si c .

6. Daca $a/b=c/d$ atunci $(a+b)/b=(c+d)/d$. Fie $2/3=8/12$, rezulta $(2+3)/3=(8+12)/12$, adica $5/3=20/12$

7. Daca $a/b=c/d$ atunci $(a+kb)/b=(c+kd)/d$. Fie $2/3=8/12$, rezulta $(2+7 \cdot 3)/3=(8+7 \cdot 12)/12$, adica $23/3=92/12$ pt.ca $23 \cdot 12=3 \cdot 92=276$

8. Daca $a/b=c/d$ atunci $(a-b)/b=(c-d)/d$. Fie $2/3=8/12$, rezulta $(2-3)/3=(8-12)/12$, adica $-1/3=-4/12$

9. Daca $a/b=c/d$ atunci $(a-kb)/b=(c-kd)/d$. Fie $2/3=8/12$, rezulta $(2-7 \cdot 3)/3=(8-7 \cdot 12)/12$, adica $-19/3=76/12$ pt.ca $19 \cdot 12=3 \cdot 76=228$

10. Daca $a/x=b/y$ atunci $a/x=b/y = (a+b)/(x+y)$, adica = cu suma numaratorilor pe suma numitorilor .

Fie $2/3=8/12$, rezulta $2/3=8/12 = (2+8)/(3+12)=10/15$

11.Daca $a/b=c/d=e/f$ atunci $a/b=c/d=e/f = (a+c+e)/(b+d+f)$, etc...

**12.Spunem ca a,b,c sunt direct proportionale cu x,y,z daca si numai daca $a/x=b/y=c/z=r$
Numerele 12; 27 si 56 sunt direct proportionale cu numerele 5; 11,25 si 23,75 pt. ca $12/5=27/11,25=56/23,75 =2,4$**

**13.Spunem ca a,b,c sunt invers proportionale cu x,y,z daca si numai daca $ax=by=cz=r$
Numerele 21; 28 si 84 sunt invers proportionale cu 12; 9 si 3 pt. ca $21 \cdot 12=28 \cdot 9=84 \cdot 3=252$**

**14.Daca trebuie sa calculam x% din a atunci scriem $a(x/100)$, adica $(ax)/100$.
De exemplu 10% din 250 este $(10 \cdot 250)/100=25$.**

Tot asa 15% din 3500 este $(15 \cdot 3500)/100=525$.

**Putem sa ne punem problema si invers, daca stim ca reducerea de pret pentru un produs care costa 2000 lei, a fost de 120 lei atunci cu cit la suta a fost redus pretul(cit la suta reprezinta reducerea):
 $(x \cdot 2000)/100=120$, deci $x=120/20=6$, adica 6%.**

Ex.1 Impartiti 360 in parti direct proportionale cu numerel 2; 3 si 5.

Notam cu x; y respectiv z cele 3 parti, ceea ce inseamna ca $x+y+z=360$ si scriem :

$x/2=y/3=z/5=(x+y+z)/(2+3+5)=360/10=36$, rezulta :
 $x/2=36$, deci $x=2\cdot 36=72$, $y/3=36$, deci $y=3\cdot 36=108$,
 $z/5=36$, deci $z=180$

Ex.2 O haina costa 40 lei. Magazinul anunta pentru sarbatori o ieftinire cu 30%. Cit va fi de sarbatori pretul hainei ?

Reducerea este : $(30\cdot 40)/100=12$ lei, deci pretul va fi $40-12=28$ lei.

Ex.3 Daca $a/b=c/d=e/f=2$ calculati :

$((a+c+e)/(b+d+f))^2/(1/2 + (a+e)/(b+f)) -3/5$

Ex.4 Daca $a/4=b/7$ si $a/2=c/15$, iar $a+b+c=287$ se cere sa aflati numerele a,b si c.

Ex.5 Stiind ca $abc=\sqrt{216}$ si $a^2/5=b^2/8=c^2/25$ aflati numerele a,b si c.

Ex.5 Stiind ca din cei 35000 de locuitori cu drept de vot dintr-o localitate s-au prezentat la vot 72% aflati citi nu si-au indeplinit indatoririle cetatenesti.

Ex.5 Stiind ca 27% dintr-un numar sete 48 calculati despre ce numar este vorba.

Ex.5 Cit la suta reprezinta 25 din 160, dar 30 din 200, dar 40 din 1500, dar 35 din 25000.

Ex.5 Stiind ca o solutie de sare are concentratia de 12%, calculati cita sare este intr-un kilogram de solutie.

Ecuatii si inecuatii in R

Ex.16 Rezolvati ecuatiile:

a) $2x-3=17$ b) $11x+23=47$ c) $12-5x=175$ d) $1/2-3x=4$
e) $2x - 4/5=1/2$ f) $(3x-1)/2-5/6 = 3/4$ g) $(3x)/(1-x)=1/4$

Ex.16 Rezolvati inecuatiile:

a) $x+1<3$ b) $2x-7<=9$ c) $|x-5|<7$ d) $|2-3x|<=1/2$
e) $(1-x)/(3x+2)< 5/6$ f) $5- (1- 3/(x+1))<1/5$

Ex.16 Rezolvati sistemele de ecuatii:

a) $\begin{cases} x+2y=20 \\ 3x+5y=55 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 5x+3y=56 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+5y=29 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

Regula de trei simpla/compusa. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuatiilor.

1. Intr-un cos sunt 5 kg de mere. In 5 cosuri identice cite kilograme de mere sunt ?

Daca **1** cos contine **5** kg de mere

Atunci **5** cosuri contin **x** kg de mere

Cum marimile sunt direct proportionale(daca avem mai multe cosuri avem si mai multe mere), scriem proportia, adica :

$1/5=5/x$, deci $x \cdot 1=5 \cdot 5$, rezulta $x=25$

2. Intre doua orase A si B ne deplasam cu 60 km/ora si ajungem in 10 ore, iar la intoarcere ne deplasam cu 80 km/ora. Cit timp consumam la intoarcere ?

**Daca la viteza de 60 km/ora mergem 10 ore
Atunci la viteza de 80 km/ora mergem x ore
Cum marimile sunt invers proportionale(daca mergem mai repede avem nevoie de mai putin timp), scriem proportia(inversind unul din rapoarte), adica : $60/80=x/10$,
deci $x \cdot 80=60 \cdot 10$, rezulta $x=7,5$ ore**

Ex.6 Daca 10 kg de rosii costa 42 lei, atunci 21 de kg de rosii cit costa ?

Ex.6 Daca numerele a,b,c sunt direct proportionale cu 5;12 si 7 se cere :

- a) cit la suta este y din x, dar din z ?**
- b) calculati $(17+a+b)/(1+c/7)$**
- c) daca $a+b+c=240$, aflati numerele a,b,c**

Ex.7 O roata face 15000 de turatii in 2 minute, cite turatii face in 10 minute ? Dar in 35 de minute ?

Ex.8 O echipa de 3 programatori au lucrat la un antivirus, 56, 72 respectiv 125 de ore si au primit pentru munca lor 3600 de Euro. Citi bani primeste fiecare ?

Ex.9 O echipa de 12 muncitori sapa un sant lung de 760 de metri in 10 zile lucrind cite 6 ore pe zi.

Citi muncitori sunt necesari pentru a sapa un sant lung de 1200 de metri in 6 zile si lucrind cite 8 ore pe zi ?

Ex.9 Daca 14 strungari realizeaza 360 de piese in 8 ore, in cit timp realizeaza 600 de piese, 22 de strungari ?

Calcul algebric.

A face calcule cu litere asa cum am facut mai sus cu numere, asta inseamna calcul algebric; sa respectam regulile de mai sus si sa facem aceleasi operatii, dupa aceleasi reguli, cu litere in loc de numere.

De exemplu : $x+x=2x$, $x+2x=3x$, $x+3x=4x$, etc...

$x-x=0$, $2x-x=x$, $x-2x=-x$, $3x-x=2x$, $x-3x=-2x$, etc...

$x \cdot x = x^2$, $x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$, $x \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$, $x \cdot x^4 = x^{1+4} = x^5$

, si in general $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, iar $x^m : x^n = x^{m-n}$, etc...

$x(-x) = -x^2$, $2x-5x = -3x$, $2x(-5x) = -10x^2$, $2xy-5xy = -3xy$,
 $-2ab+3a^2b-7ab-11a^2b = -9ab-8a^2b$, etc...

Ex.16 Efectuati :

- a) $4x+2x$ b) $5x+12x$ c) $9x-3x$ d) $11x-6x$ e) $2x-90x$
f) $2ab+11ab$ g) $-5ab+3ab$ h) $-7ab-4ab$ i) $5ab-20ab$
j) $3x^2+8x^2+2x^2$ k) $-5x^2+2x^2-12x^2$ l) $6x^2-81x^2+x^2$
m) $-43ab^2+23ab^2-12ab^2$

Ex.16 Efectuati :

- a) $5ax+3ab-2ax+7ab$ b) $5a^2x+3ab-2a^2x+7ab$
c) $5ab^2x+3a^{23}b-2ab^2x+7a^{23}b$ d) $-3a^2x+2ab-12a^2x+ab$
e) $15a^2x+30ab-22a^2x+27ab-5a^2x-33ab-12a^2x+77ab$

Ex.16 Efectuati :

- a) $a(x+3b)-9ax-8ab$ b) $a(ax+4b)-2a^2x-3ab$
c) $5ab(bx-2a)-7ab^2x+3a^2b$ d) $-3a^2(x+2ab)-10a^2x+a^3b$
e) $15a^2x-30ab-2a(ax+7b)-5a^2x$ f) $-xy-(3axy-xy)/(1-3a)$
g) $((a^2-3a^3x)-ab(1-3ax))/(a-b)$ h) $3xy-2a^2xy-3ab+2a^3b$
i) $(xy-2a^2xy-ab+2a^3b)/(xy-ab)+2a^2$ j) $a(x-y)-9ax+9ay$
k) $a(a+2b)/(-a^2b-2ab^2)$ l) $(-6ax-8ab+3ax^2+4abx)/(x-2)$

Ex.16 Efectuati :

- a) $(a-x)(x+b)-3ax-4ab+5x^2$ b) $a(x-b)+2a(b-x)$
c) $-5ab(b-2a)-8ab^2+13a^2b$ d) $(x-2y)(x+2y)+4y^2$
e) $-3(a^2-b)(x+ab)-10a^2x+a^3b+6bx-12ab^2$
f) $15x-3x(1-x)-2x(x+7)-5x$ g) $(2x^2-1)(2x^2+1)$

Ex.16 Efectuati :

- a) $(a-x)^2$ b) $2a(b-x)^2$ c) $-5(b-2a)^2$ d) $(x+2y)^2$
e) $-3(a^2-b)^3$ f) $15x(1-3x)(1-x)^2+45x^4$ g) $(2x^2-1)^2$
h) $(1-x)(1+x)$ i) $(1-x^2)(1+x^2)$ j) $(x^2+3)(x^2-3)$

Factor comun: $ax+bx=x(a+b)$

Ex.16 Dati factor comun pentru a aduce la forma cea mai simpla :

- a) $ax+3ab$ b) $ax-2a^2x$ c) $5ab-2ab^2$ d) $-3a^2x+10a^2xb$
e) $15a^2x-5a^2x^2$ f) $5a^2-25ax^2-55a^2x^2$ g) $xa^2-5ax^2-a^2x^2$

Ex.16 Simplificati fractiile :

- a) $(ax+a)/(x+1)$ b) $(x-2x^2)/(2x-1)$ c) $(a^2b-ab^2)/(a-b)$
d) $(-a^2+6a)/(a-6)$ e) $(5ax-15a^2x^2)/(a(3ax-1))$
f) $(5a^2-25a^3-55a^4)/(1-5a-11a)$ g) $(a-5ax^2)/(x-5x^3)$

Ex.12 Sa se desompuna in factori :

a) $1+a+b+ab$ b) $1+a+b+c+ab+ac+bc+abc$

c) $1+x+x^2+x^3$ d) $1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6$

e) a^3+5a^2+4a f) $a^4-14a^3+56a^2-64a$

g) $1+2a+2b+4ab$ h) $(1-2a)(1-2b)-8ab^2-8a^2b$

i) $2+(a^2+b^2)/(ab)$ j) $2+(a/b)^2+(b/a)^2$

k) $(a-b)^2+ab(1+ab)+ab+1$ l) $1-x^2+xy-x^2y$

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ex.16 Scrieti sub forma de binom la patrat

expresiile: a) x^2+2x+1 b) x^2-2x+1 c) x^2+6x+9

d) x^2-6x+9 e) $x^2+12x+36$ f) $x^2-24x+144$

g) $2x^2+4x+2$ h) $3x^2-6x+3$ i) $4x^2+12x+9$

j) $2x^2+2\sqrt{2}x+1$ k) $x^2-2\sqrt{3}x+3$

Ex.16 Scrieti termenii care lipsesc pentru ca

expresiile date sa fie binoame la patrat: a) $x^2+2x+?$

b) $x^2-18x+?$ c) $x^2+30x+?$ d) $x^2-6x...$ e) $x^2+36 ...$

f) $x^2+64...$ g) $2x^2+4x...$ h) $x^2-6x+...$ i) $4x^2+36x...$

j) $2\sqrt{5}x+5 ...$ k) $x^2-2\sqrt{7}x...$

Ex.16 Efectuati: a) $(x-2)^2$ b) $(x+5)^2$ c) $(2x-1)^2$
d) $(1-2x)^2$ e) $(6x-1)^2$ f) $(4+x)^2$ g) $(1+2x)^3$ h) $(3-5x)^3$
i) $4(x-2)^2$ j) $(\sqrt{5}x+5)^2$ k) $(x-2\sqrt{7})$ l) $(1-2x+x^2)^3$

Ex.16 Descompuneti in factori: a) $1-2x+(1-2x)^2$
b) $1-4x^2$ c) $121x-x^3$ d) $-(-2+3x)(2+3x)$
e) $(1-2x)^2-(x+3)^2$ f) $(3-x)^2-(2+x)^2$ g) $1-x^2-y^2+x^2y^2$
h) $4x^2-4x-24$ i) $9x^2-12x-32$ j) $(2x-3)^2-(3+5x)^2$

Ex.16 Daca $a+b=6$ si $ab=25$ calculati : $(a+b)^2$, a^2+b^2 ,
 $(a-b)^2$, a^2-b^2 , $2a^2b+2ab^2$, $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$,

Ex.16 Simplificati fractiile: a) $(x-1)/(x^2-1)$
b) $(1-2x)/(1-4x^2)$ c) $(\sqrt{3}-x)/(3-x^2)$ d) $(2-x^2)/(4-x^4)$

Ex.16 Efectuati : a) $1 - (x-1)/(x^2-1)$ b) $1 - (1-2x)/(1-4x^2)$
c) $x/(3+x) - (3-x)/(9-x^2)$ d) $x^2 - (2-x^2)/(4-x^4)$

Ex.16 Simplificati fractiile:

a) $((1-3x)^2+7x^2+30x+8)/(8x+6)$
b) $((1+2x)(1+2y)(1+xy)+3xy+8xy^2+8x^2y+16x^2y^2)/$
 $(1+2x+2y+4xy)$ c) $(x^2z-y^2z+x^2t-y^2t)/(xz-yt+xt-yz)$

Ex.16 Daca $a=x/(x+1)$, $b=y/(y+1)$, $c=z/(z+1)$ aratati
ca daca $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$ si $x, y, z \in \mathbb{R}$ atunci :
 $1/a + 1/b + 1/c \geq 6$.

Ex.16 Daca $a=x/(y+z)$, $b=y/(x+z)$, $c=z/(x+y)$ aratati
ca avem identitatea : $ab + bc + ca = 1 - 2abc$.

Ecuatia de gradul 2.

$$ax^2 + bx + c = 0, \Delta = b^2 - 4ac, x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se vede ca $x_1 + x_2 = -b/a$, iar $x_1 x_2 = c/a$.

Ecuatia de gradul 2 se rezolva astfel :

$$x^2 - 5x + 6 = 0, a = 1, b = -5, c = 6, \text{ apoi calculam}$$

$$\text{realizantul ecuatiei } \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) =$$

$$25 - 24 = 1, \text{ deci } \sqrt{\Delta} = 1 \text{ si aplicam formulele de mai}$$

sus pentru radacinile/solutiile ecuatiei, adica vom

calcula x_1 si x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 1}{2} = 6/2 = 3,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 1}{2} = 4/2 = 2,$$

Verificare: inlocuim in ecuatia data solutiile 3,

$$\text{respectiv 2 : } 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 15 - 15 = 0,$$

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 10 - 10 = 0, \text{ deci ambele solutii}$$

verifica ecuatia.

Daca vrem sa descompunem in factori o expresie

de gradul doi, de exemplu expresia $x^2 - 3x - 10$,

rezolvam mai intii ecuatia asociata $x^2 - 3x - 10 = 0$,

Asa cum am aratat mai sus, apoi aplicam formula

de descompunere : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

In cazul nostru : $a = 1, b = -3, c = -10$, calculam

$$\text{realizantul ecuatiei } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-10) =$$

$$9 + 40 = 49, \text{ deci } \sqrt{\Delta} = 7 \text{ si calculam solutiile ecuatiei:}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 7}{2} = 10/2 = 5,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 7}{2} = -4/2 = -2 \text{ si}$$

descompunerea este : $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

Daca ecuatia are realizantul $\Delta < 0$, atunci ecuatia

nu are radacini reale si vom studia in clasa a 9-a

cum o rezolvam, acum, daca $\Delta < 0$ spunem ca

ecuatia nu se poate rezolva in \mathbb{R} si nici nu putem descompune in \mathbb{R} polinomul $ax^2 + bx + c$.

Ex.16 Verificati daca numerele scrise in dreptul fiecarei ecuatii sunt solutii ale acestor ecuatii:

- a) $x^2 - 2x + 7 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ b) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ c) $2x^2 + 3x - 7 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$
d) $-5x^2 - 3x + 14 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$

Ex.16 Rezolvati ecuatiile:

- a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $x^2 - 7x + 10 = 0$ c) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
d) $-5x^2 - 3x + 14 = 0$ e) $-x^2 + 3x - 2 = 0$ f) $-3x^2 - 3x - 10 = 0$

Ex.16 Descompuneti in factori expresiile :

- a) $x^2 - 5x + 6$ b) $x^2 - 7x + 10$ c) $2x^2 + 3x - 2$
d) $-5x^2 - 3x + 14$ e) $-x^2 + 3x - 2$ f) $-2x^2 + 13x - 6$
g) $10x^2 + 11x + 3$ h) $-6x^2 - x + 15$ i) $-8x^2 + 14x + 15$

Ex.16 Simplificati fractiile :

- a) $(x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 4)$ b) $(x^2 - 7x + 10)/(x^2 - 8x + 15)$
c) $(2x^2 + 3x - 2)/(x^2 + 9x + 14)$ d) $(-5x^2 - 3x + 14)/(2x^2 + x - 6)$
e) $(-x^2 + 3x - 2)/(1 - x^2)$ f) $(-2x^2 + 13x - 6)/(x^2 - 7x - 6)$
g) $(10x^2 + 11x + 3)/(4x^2 - 4x - 3)$ h) $(-6x^2 - x + 15)/(9 - 4x^2)$
i) $(-8x^2 + 14x + 15)/(4x^2 + 11x + 6)$

Ex.16 Daca x_1 si x_2 sunt radacinile ecuatiei $x^2 - 7x + 12$, calculati $x_1^2 + x_2^2$ fara a rezolva ecuatia.

Ex.16 Aflati $m \in \mathbb{R}$ stiind ca $x_1 = 3$ este o radacina a ecuatiei $x^2 - 2(m+1)x + 12$.

Ex.16 Aflati suma si produsul radacinilor ecuatiei $x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$ stiind ca $x_1^2 + x_2^2 = 40$.

Funcții . Grafice.

O funcție este data/definită dacă se dau două mulțimi A (numită domeniul de definiție) și B (mulțimea valorilor funcției sau codomeniul) și mulțimea $G=A \times B$ (produsul cartezian al mulțimilor A și B), de perechi de forma $(x;y)$, unde $x \in A$ și $y \in B$, astfel încât, pentru orice $x \in A$ există o pereche și numai una $(x;y) \in G$, cu $y \in B$.

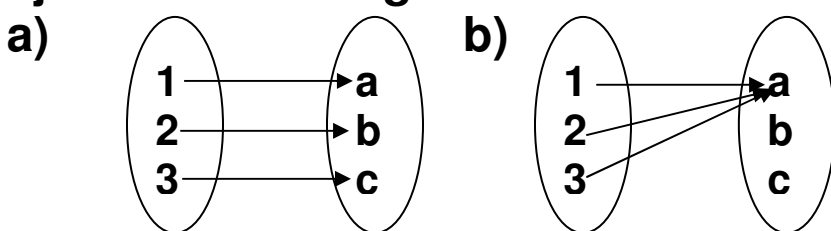
Scriem $f:A \rightarrow B$, și spunem că am definit funcția f pe A cu valori în B și $y=f(x)$ definește relația dintre x și y , iar G se numește graficul funcției.

De exemplu : $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x+3$ este o funcție reală de variabilă reală (adică definită pe \mathbb{R} cu valori în \mathbb{R}).

Putem defini o funcție printr-un tabel de genul:

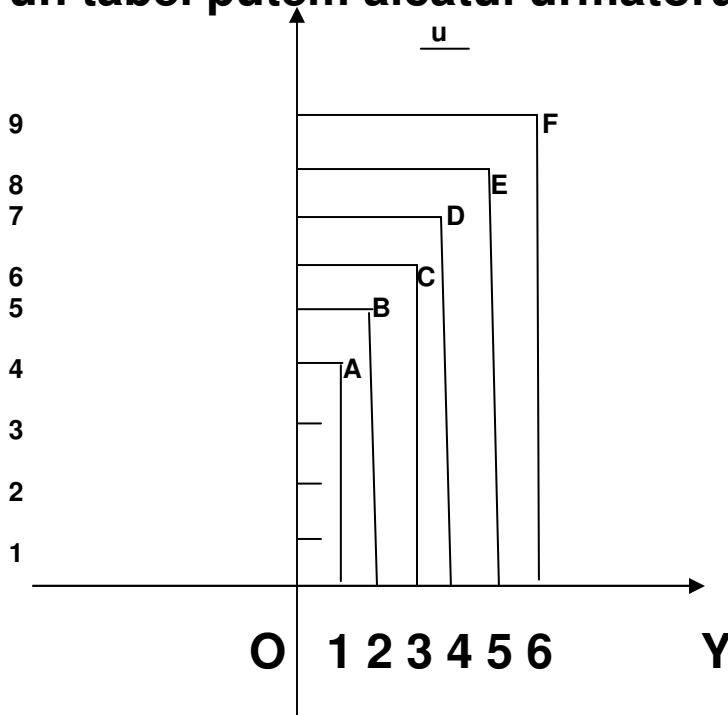
x	1	2	3	4	5	6	$A=\{1;2;3;4;5;6\}$	$B=\{4;5;6;7;8;9\}$
y	4	5	6	7	8	9	$G=\{(1;4);(2;5);(3;6);(4;7);(5;8);(6;9)\}$	

Putem defini o funcție printr-o diagramă cu ajutorul unor săgeți :



Fiecare pereche din mulțimea G , dacă A și B sunt mulțimi de numere, se poate reprezenta grafic într-un sistem de coordonate ortogonale XOY obișnuite.

De exemplu pentru functia definita mai sus printr-un tabel putem alcatui urmatorul grafic:

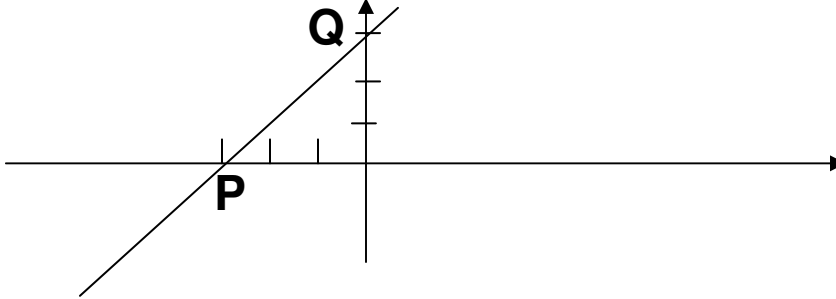


Observam ca graficul este format din 6 puncte distincte(separate intre ele)A(1;4), B(2;5)...

Orice punct P de pe OX are coordonatele de forma $P(a;0)$, deci are ordonata 0. Asta inseamna ca daca vrem sa aflam intersectia graficului unei functii cu OX facem ordonata 0, adica ecuatia $f(x)=0$ cu solutia x_0 , ne da intersectia dintre $G_f \cap OX = P(x_0;0)$. Pentru functia $f(x)=x+3$, intersectia graficului cu OX este punctul $G_f \cap OX = P(x_0;0)$, unde x_0 este solutia ecuatiei $f(x)=0$, rezulta $x+3=0$ si $x=-3$, deci $P(-3;0)$.

Orice punct de pe OY are abscisa 0, adica $x=0$ si deci punctul Q in care graficul intersecteaza OY are coordonatele $Q(0;f(0))$. Deci $f(0)=3$ si $Q(0;3) = G_f \cap OY$.

Reprezentarea graficului se face folosind cele doua puncte, deoarece graficul unei functii de forma $f(x)=ax+b$ este o dreapta, o semidreapta sau un segment, si stim ca doua puncte determina o dreapta.



Daca functia $f(x)=x+3$ este definita pe intervalul $[-6; 11]$ atunci graficul este un segment, daca este definita pe intervalul $(-\infty; 7)$ graficul va fi o semidreapta, etc...

Ex. Se da functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=mx-5$, $m \in \mathbb{R}$.
Determinati parametrul real m astfel incit $f(-5)=12$.

Ex. Se da functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=3-2mx$, $m \in \mathbb{R}$.
Determinati parametrul real m astfel incit $f(1)=1$.
Aflati aria determinata de graficul functiei si axa OX , pentru m determinat mai inainte .

Ex. Se da functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Determinati parametrii reali a si b astfel incit punctele $A(-3; 8)$ si $B(2; 13)$ sa fie pe graficul functiei. Aflati aria determinata de graficul functiei si axa OX , pentru parametrii a si b determinati.

Probabilitati.

Daca aruncam o moneda nu stim precis ce cade, marca sau leul, dar putem face o previziune sigura, si anume ca sansele sunt jumătate-jumătate, adica ar putea sa cada marca, dar in egala masura si leul. Cele doua evenimente(cade marca sau leul) sunt egal probabile si nici unul nu-l poate influenta pe celalalt, adica daca ar cadea marca acum, nu inseamna ca urmeaza leul. Adica la fiecare aruncare cu banul , sansele sunt egale sa cada marca sau leul. Spunem ca probabilitatea de producere a unuia din cele doua evenimente(aparitia marcii sau leului) este $1/2$. Un eveniment sigur are probabilitatea 1, iar un eveniment care nu are nici o sansa sa se produca, are probabilitatea 0. Probabilitatea este deci un numar intre 0 si 1 care ne arata care sunt sansele ca un anumit eveniment sa se produca. In cazul monezii observam ca sunt 2 evenimente posibile. Daca asteptam sa se produca aparitia marcii, de exemplu, atunci probabilitatea este $1/2$, adica numarul de evenimente favorabile impartit la numarul total de evenimente posibile.

Daca avem o urna cu 5 bile, 2 albe si 3 rosii, probabilitatea ca sa extragem, fara sa vedem, o bila rosie este $3/5$, pentru ca sunt 3 cazuri favorabile si 5 in total.

Ex. Care este probabilitatea sa extragem dintr-o urna un loz cistigator, fara sa vedem, stiind ca in urna sunt 32 de lozuri, dintre care 6 sunt cistigatoare ?

Ex. Care este probabilitatea ca aruncind doua zaruri sa obtinem doua numere care adunate sa dea 7 ?

Ex. Cu cifrele 0 si 1 scriem siruri de cite trei cifre in toate modurile posibile, pe mai multe cartonase. Care este probabilitatea ca extragind un cartonasa, la intimplare, din toate cartonasele posibile sa fie un cartonasa cu toate cifrele identice ?

Ex. Intr-o urna avem 125 de lozuri si stim ca 8% din ele sunt cistigatoare. Care este probabilitatea sa extragem din aceasta urna un loz cistigator, fara sa vedem ?

Ex. O carte este deschisa la intimplare. Care este probabilitatea sa obtinem un numar impar daca adunam numerele de pe cele doua pagini ?

Ex. Care este probabilitatea sa extragem dintr-o urna un loz cistigator, fara sa vedem, stiind ca in urna sunt 350 de lozuri, dintre care 6% sunt cistigatoare ?

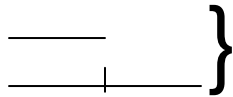
Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuatiilor si sistemelor de ecuatii.

Sa rezolvam urmatoarea problema :

Sa se afle 2 numere stiind ca suma lor este 75, iar unul este de doua ori mai mare decit celalalt.

Aritmetic(cu segmente):

a
b



suma este 75, dar sunt 3 parti egale,
deci fiecare parte este $75:3=25$

Un numar este 25, iar celalalt $2 \cdot 25=50$.

Algebric(cu o necunoscuta): fie x numarul mai mic, al doilea este deci $2x$, rezulta ca $x+2x=75$, $x=25, \dots$

Algebric(cu doua necunoscute): notam cu x numarul mai mic si pe al doilea cu y, rezulta ca $x+y=75$, pentru ca suma numerelor este 75 si $y=2x$, pentru ca unul este de doua ori mai mare, astfel ca trebuie sa rezolvam un sistem de doua ecuatii cu doua necunoscute.

Ex. Daca 12 kg de portocale costa 60 de lei, cit costa 7 kg de portocale ?

Ex. Aflati cinci numere pare consecutive a caror suma este 280.

Ex. Suma a cinci numere naturale consecutive este 325. Care sunt numerele ?

Ex. Aurel, George si Petrica au primit de la parintii lor, la plecarea intr-o excursie, suma de 564 de lei. Cit are fiecare daca Aurel si George au impreuna 450 de lei, iar George impreuna cu Petrica au 364 de lei ?

Ex. Aflati 3 numere stiind ca jumatate din primul numar este egala cu o cincime din cel de-al treilea numar si cu o patrime din cel de-al doilea, iar al treilea este mai mare cu 25 decit cel de-al doilea.

Ex. O carte costa cu 74,50 lei mai mult decit un caiet. Cartea costa cit 10 caiete si inca 25 de bani. Cit costa 5 caiete si 3 carti impreuna ?

Ex. Aflati trei numere stiind ca suma lor este 870, iar daca impartim primul numar la al doilea obtinem restul 12 si citul 9, iar daca il impartim pe al treilea la cel de-al doilea obtinem citul 5 si restul 3.

Ex. Intr-un bloc sunt 275 de camere, unele in apartamente de 2 camere, altele in apartamente de 3 camere. Cite apartamente din fiecare fel sunt daca in total sunt 120 de apartamente ?

Ex. Ma gindesc la un numar, il inmultesc cu 11, la rezultat adaug 25, ceea ce obtin impart la 7, iar la rezultat adaug 32. Obtin astfel 221. La ce numar m-am gindit ?